CAPITULO V. SOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE: PRELIMINARES

1. SEPARACION DE RAICES

En esta segunda parte analizaremos uno de los problemas básicos del análisis numérico: el **problema de búsqueda de raíces**.

Si una ecuación algebráica o trascendente es relativamente complicada, no resulta posible por lo general hallar raíces exactas. Es más, en algunos casos las ecuaciones tienen coeficientes conocidos sólo de forma aproximada, y por tanto, carece de sentido tratar de hallar las raíces exactas de la ecuación. Por consiguiente, adquieren particular importancia los procedimientos de cálculo aproximado de raíces de una ecuación así como la estimación de su grado de exactitud.

El problema consiste en encontrar los valores de la variable x que satisfacen la ecuación

$$f(x) = 0 \, , \tag{V.1}$$

para una función f dada, que está definida y es continua en un cierto intervalo finito o infinito $a < x < b$. En ciertos casos se necesitará la existencia y continuidad de la primera derivada $f'(x)$ e incluso de la segunda derivada $f''(x)$.

A una solución de este problema, es decir a todo valor p para el cual la función $f(x)$ es cero, se le llama **cero** de la función $f(x)$ o una **raíz** de $f(x) = 0$.

Supondremos que la ecuación $(V.1)$ tiene únicamente raíces separadas, es decir, para cada raíz existe un entorno que no contiene otras raíces de la ecuación.

El cálculo aproximado de las raíces reales separadas de $(V.1)$ se efectúa por lo general en dos etapas:

(a) separación de raíces, es decir, establecer los intervalos más pequeños posibles $[\alpha, \beta]$ que contengan una y solamente una raíz de la ecuación $(V.1)$;

(b) mejorar los valores de las raíces aproximadas, es decir, manipularlos hasta que presenten el grado de exactitud especificado.

Recordemos antes el **Teorema del Valor Intermedio**:

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y K es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c en (a, b) tal que $f(c) = K$.

Y un Corolario de ese Teorema:

Corolario V.1

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[\alpha, \beta]$, es decir, $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$; en otras palabras, habrá al menos un número $p \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(p) = 0$.

La raíz p será única si la derivada $f'(x)$ existe y mantiene el signo dentro del intervalo (α, β); esto es, si $f'(x) > 0$ (ó $f'(x) < 0$) para $\alpha < x < \beta$.

El proceso de separación de raíces comienza estableciendo los signos de la función $f(x)$ en los puntos extremos $x = a$ y $x = b$ de sus dominios de existencia. A continuación se determinan los signos de la función $f(x)$ para un número intermedio de puntos $x = \alpha_1, \alpha_2, ...$, cuya elección depende de la peculiaridades de la función $f(x)$. Si se cumple que $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$, entonces, en virtud del Corolario V.1, existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo (α_k, α_{k+1}). Debemos asegurarnos que esta raíz es la única.

En la práctica suele ser suficiente, en el caso de separación de raíces, efectuar el proceso de bisección (que analizaremos en más detalle en el próximo capítulo), dividiendo aproximadamente el intervalo dado (α, β) en dos, cuatro, ocho, ..., partes iguales (hasta un cierto intervalo) y determinar el signo de $f(x)$ en los puntos de división. Conviene recordar que en una ecuación algebráica de grado n,

$$a_0\ x^n + a_1\ x^{n-1} + ... + a_n = 0\ , \qquad a_0 \neq 0$$

tiene a lo sumo n raíces reales. Por consiguiente, si para una ecuación de este tipo se obtienen n cambios de signo (es decir, $n + 1$ intervalos el los cuales la función tiene signo distinto), habrán quedado separadas todas las raíces de la ecuación.

Ejemplo 1.

Queremos separar las raíces de la ecuación:

$$f(x) \equiv x^3 - 6\ x + 2 = 0\ .$$

De la tabla siguiente

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+1$	$+3$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

se sigue que la ecuación dada tiene tres raíces reales dentro de los intervalos $(-3, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 3)$.

Si existe una derivada continua $f'(x)$ y pueden calcularse fácilmente las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, puede regularizarse el proceso de separación de raíces de la ecuación $(V.1)$. Evidentemente es suficiente contar únicamente los signos de la función $f(x)$ para los ceros de su derivada y en los puntos extremos $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 2.

Se quieren separar las raíces de la ecuación

$$f(x) \equiv x^4 - 4\ x - 1 = 0\ .$$

Dado que $f'(x) = 4(x^3 - 1)$, será $f'(x) = 0$ para $x = 1$. Tenemos: $f(-\infty) > 0$ $(+)$, $f(1) < 0$ $(-)$, $f(+\infty) > 0$ $(+)$. Entonces, la ecuación tiene únicamente dos raíces reales, una de las cuales cae en el intervalo $(-\infty, 1)$, y la otra en el $(1, +\infty)$.

Ejemplo 3.

Se quiere determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$f(x) \equiv x + e^x = 0 \ .$$

Como $f'(x) = 1 + e^x > 0$ y $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, se deduce que la ecuación tiene únicamente una raíz real.

Vamos ahora a recordar dos Teoremas que usaremos más adelante:

Teorema del Valor Medio

Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y f es diferenciable en (a,b), entonces existe un número c, $a < c < b$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Teorema del Valor Extremo

Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a,b]$. Si además, f es diferenciable en (a,b), entonces los números c_1 y c_2 existirán ya sea en los extremos de $[a,b]$, o donde f' sea cero.

Veamos ahora una estimación del error de una raíz aproximada.

Teorema V.2

Sea p una raíz exacta y $\overline{x}$ una raíz aproximada de la ecuación $f(x) = 0$, situadas ambas en el mismo intervalo $[\alpha, \beta]$, y

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0 \ ,$$

para $\alpha \leq x \leq \beta$. Se cumple entonces la siguiente aproximación:

$$|\overline{x} - p| \leq \frac{|f(\overline{x})|}{m_1} \ . \qquad (V.2)$$

Demostración: aplicando el Teorema del valor medio, se tiene

$$f(\overline{x}) - f(p) = (\overline{x} - p) \ f'(c)$$

donde c es un valor intermedio entre $\overline{x}$ y p, es decir, $c \in (\alpha, \beta)$.
De aquí , ya que $f(p) = 0$ y $|f'(c)| \geq m_1$ (puede tomarse para m_1, por ejemplo, el valor más pequeño de $|f'(x)|$ cuando $\alpha \leq x \leq \beta$), tenemos

$$|f(\overline{x}) - f(p)| = |f(\overline{x})| \geq m_1 \ |\overline{x} - p|$$

y entonces,

$$|\overline{x} - p| \leq \frac{|f(\overline{x})|}{m_1} \ .$$

c.q.d.

Nótese que la fórmula (V.2) puede ofrecer sólo resultados someros y por tanto no es siempre conveniente utilizarla. Por esta razón en la práctica resulta mejor estrechar el intervalo general (α, β) que contiene la raíz p y su valor aproximado $\overline{x}$, y considerar $|\overline{x} - p| \leq \beta - \alpha$.

Ejemplo 4.

Como valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$ tenemos $\overline{x} = 1.22$. Estímese el error absoluto en esta raíz.

$$f(\overline{x}) = 2.2153 - 1.22 - 1 = -0.0047$$

Como para $\overline{\overline{x}} = 1.23$, tenemos

$$f(\overline{\overline{x}}) = 2.2889 - 1.23 - 1 = 0.0589$$

la raíz exacta p cae en el intervalo $(1.22, 1.23)$. La derivada $f'(x) = 4\ x^3 - 1$ crece en forma monótona y por tanto su valor más pequeño en el intervalo dado es

$$m_1 = 4 * 1.22^3 - 1 = 4 * 1.8158 - 1 = 6.2632$$

de donde, mediante la fórmula (V.2), tenemos

$$|\overline{x} - p| \leq \frac{0.0047}{6.2632} \approx 0.000750415\ .$$

Nótese que ocasionalmente, en la práctica, la exactitud de una raíz aproximada x se estima en función de cómo satisfaga la ecuación dada $f(x) = 0$; es decir, si el número $|f(\overline{x})|$ es pequeño, se considera entonces $\overline{x}$ una buena aproximación a la raíz exacta p; pero si $|f(\overline{x})|$ es grande, entonces $\overline{x}$ se toma como aproximación grosera de la raíz exacta p. Pero esa forma de proceder es errónea, porque hay funciones que crecen muy rápidamente y entonces el valor $|f(\overline{x})|$ es grande aunque $\overline{x}$ está cerca de p, y hay funciones que crecen muy lentamente y entonces el valor $|f(\overline{x})|$ es pequeño aunque $\overline{x}$ esté lejano de p.

2. SOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES

Las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{V.1}$$

pueden determinarse en forma aproximada considerando las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje x.

Resulta aconsejable a veces sustituir la ecuación dada por una ecuación equivalente (dos ecuaciones se denominan equivalentes si tienen exactamente las mismas raíces):

$$\phi(x) = \psi(x)$$

donde las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son más sencillas que $f(x)$. Constrúyanse entonces las gráficas de las funciones $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$, y las raíces deseadas serán entonces las abscisas de los puntos de intersección de estas gráficas.

Ejemplo 5.

Resuélvase gráficamente la siguiente ecuación

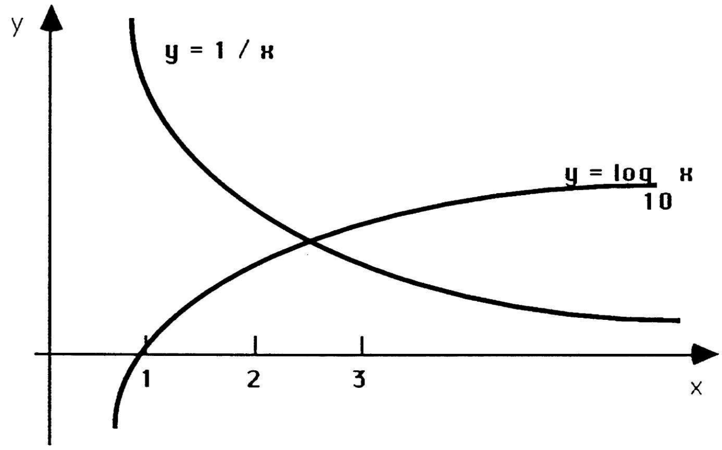
$$x \ \log_{10} x = 1 \ .$$

Para ello, escríbimos la ecuación de la forma

$$\log_{10} x = \frac{1}{x} \ .$$

Las raíces pueden entonces hallarse fácilmente, ya que son las abscisas de los puntos de intersección de la curva logarítmica $y = \log_{10} x$ y la hipérbola $y = \frac{1}{x}$. Construyendo estas curvas, tendremos un valor aproximado $p \approx 2.5$ de la única raíz de la ecuación dada.

Figura 1



Si una de las funciones $\phi(x)$ ó $\psi(x)$ es lineal queda simplificada la operación de hallar las raíces de la ecuación. Las raíces son entonces las abscisas de los puntos de intersección de la curva $y = \phi(x)$ y la línea recta $y = a \ x + b$. Este procedimiento es particularmente ventajoso cuando han de resolverse series de ecuaciones del mismo tipo que difieren únicamente en los coeficientes a y b de una función lineal. La construcción gráfica se reduce entonces a hallar los puntos de intersección de una gráfica dada y varias líneas rectas. Este caso incluye evidentemente las ecuaciones de tres términos

$$x^n + a \ x + b = 0 \ .$$

Ejemplo 6.

Resuélvanse las ecuaciones cúbicas

$$x^3 - 1.75 \ x + 0.75 = 0$$

y

$$x^3 + 2\ x + 7.8 = 0\ .$$

Construímos la cúbica $y = x^3$. Las raíces deseadas son las abscisas de los puntos de intersección de esta cúbica con las líneas rectas $y = 1.75\ x - 0.75$ e $y = -2\ x - 7.8$.

Se deduce claramente de la figura que la primera ecuación tiene tres raíces reales: $x_1 = -1.5$, $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 1$, y la segunda ecuación tiene únicamente una raíz real, $x_1 = -1.65$.

Figura 2