CAPITULO III. SISTEMAS DE NUMERACION

1. REPRESENTACION DE LA INFORMACION

El sistema de numeración usado habitualmente es el decimal, de base 10, que no es adecuado para ser manejado por el ordenador, fundamentalmente porque es más sencillo construir un elemento con únicamente dos posibles estados que uno con 10 estados. Y por otra parte como los componentes electrónicos envejecen es más dificil mantener correctamente un dispositivo con 10 estados que uno con dos.

Una información dada al ordenador es, generalmente, representada con una sucesión de caracteres escogidos desde un alfabeto compuesto sólo de dos caracteres, representados, respectivamente, por los simbolos "0" y "1", llamados cifras binarias o **bits** (binary digits).

Cada uno de los caracteres es físicamente representado por uno de los posibles estados de los componentes del ordenador: un núcleo magnético es imanado en una de las dos posibles direcciones de magnetización, un circuito puede ser abierto o cerrado.

El problema de representar los caracteres de un alfabeto hecho con más de dos caracteres se resuelve uniendo más cifras binarias; por ejemplo, los agrupamientos hechos con dos cifras binarias (00, 01, 10, 11) dan la posibilidad de distinguir cuatro caracteres diversos, los obtenidos con tres cifras binarias se pueden usar para distinguir ocho caracteres distintos, y en general los agrupamientos obtenidos con n cifras binarias pueden representar 2^n caracteres distintos.

El usuario de un ordenador no tiene que conocer necesariamente la representación de los datos en la máquina, porque los lenguajes comunes de programación permiten especificar datos e instrucciones con los caracteres y las cifras usadas comunmente por el hombre, y son los compiladores los que convierten al sistema de representación propio del ordenador.

Sin embargo, para la solución de muchos problemas es conveniente que el usuario de un ordenador conozca el sistema binario y los principios fundamentales de la aritmética de un ordenador, aunque nunca contará en la aritmética binaria.

2. INTRODUCCION A LOS SISTEMAS NUMERICOS

La representación común de los números es constituida por sucesiones de los símbolos "$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$". Tales sucesiones pueden ser precedidas por los símbolos "+" y "-" (para indicar un número positivo o negativo), y pueden tener el símbolo "." (**punto raíz**, que separa la parte entera del número, a la izquierda, de su parte decimal, a la derecha). Nuestro sistema decimal es un sistema **posicional**, es decir cada cifra tiene un *peso*. La posición ocupada por cada dígito tiene un significado exacto y determina la contribución de la cifra al valor numérico de la sucesión.

Por ejemplo, 35 y 53 están constituidos por las mismas cifras 3 y 5, pero tienen significados distintos

$$35 = 3 * 10^1 + 5 * 10^0 \ ,$$

$$53 = 5 * 10^1 + 3 * 10^0 \ .$$

Cada cifra de la sucesión es multiplicada por una potencia de 10, con el exponente determinado por la posición de la cifra con respecto al punto raíz. El valor 10 es la **base** de nuestro sistema de numeración, que por esta razón se denomina **sistema posicional en base diez**. Los exponentes de la parte entera son positivos y crecen en unidades a partir de cero, que corresponde al exponente de la potencia de 10 que multiplica la cifra más a la derecha de la parte entera, los exponentes de la parte fraccionaria del número son negativos y disminuyen en unidades a partir de -1, que corresponde al exponente de la potencia de 10 que multiplica la primera cifra de la parte fraccionaria.

Un ejemplo de sistema no posicional lo constituye la numeración romana. En ella, al valor 5 le corresponde el símbolo V, mientras que al valor 50 le corresponde el símbolo L. Para pasar de 5 a 50 no basta con cambiar la posición del símbolo 5 (V), sino que hay que introducir uno nuevo (L).

La descripción hecha del sistema posicional decimal sugiere la posibilidad de usar un sistema de numeración en una base distinta de 10. Con el sistema en base 10 se usan 10 cifras para representar cada número; en general, para representar un número en una base b, se necesitan b símbolos. Entonces, cuando se considera como base un entero $b > 10$, las 10 cifras del sistema decimal no bastan y es necesario usar símbolos nuevos.

Las bases más usadas, además de la 10, son 2, 8 y 16. El sistema en base dos, llamado **sistema binario**, usa las cifras "0, 1". El sistema en base ocho, llamado **sistema octal**, usa las cifras "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7". Y el **sistema hexadecimal**, en base 16, usa las cifras "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F".

3. CONVERSION DESDE EL SISTEMA DECIMAL AL SISTEMA NUMERICO EN BASE b

La existencia de sistemas de numeración en base distintas de 10, hace que nos planteemos el problema de la representación de los números en una nueva base, y la definición de las reglas y de las propiedades formales de las operaciones a ejecutar en la nueva aritmética.

Supongamos que conocemos la representación decimal de un número cualquiera entero positivo, y queremos construir la correspondiente representación en base b. Cada entero n se expresa en la base b en la forma

$$n = d_p * b^p + d_{p-1} * b^{p-1} + ... + d_1 * b^1 + d_0 * b^0 \ , \qquad (III.1)$$

donde p y $d_p, d_{p-1}, ..., d_1, d_0$ son enteros que tenemos que determinar para obtener la representación

$$n_b = d_p \ d_{p-1} \ ... \ d_1 \ d_0 \ .$$

La ecuación (III.1) se puede escribir de la forma

$$n = b * (d_p * b^{p-1} + d_{p-1} * b^{p-2} + ... + d_1) + d_0,$$

por lo cual se deduce que d_0 es el resto de la división de n entre b. Si denotamos con n_1 el cociente de esa división, tenemos

$$n_1 = d_p * b^{p-1} + d_{p-1} * b^{p-2} + ... + d_1$$

que podemos escribir

$$n_1 = b * (d_p * b^{p-2} + d_{p-1} * b^{p-3} + ... + d_2) + d_1.$$

Entonces, se deduce que d_1 es el resto de dividir n_1 entre b. Si denotamos con n_2 el cociente de esa división, tenemos

$$n_2 = d_p * b^{p-2} + d_{p-1} * b^{p-3} + ... + d_2$$

que podemos escribir como

$$n_2 = b * (d_p * b^{p-3} + d_{p-1} * b^{p-4} + ... + d_3) + d_2.$$

Entonces, se deduce que d_2 es el resto de dividir n_2 entre b. Procediendo de manera parecida se llega a determinar d_{p-1} como el resto de la división de n_{p-1} entre b, y donde

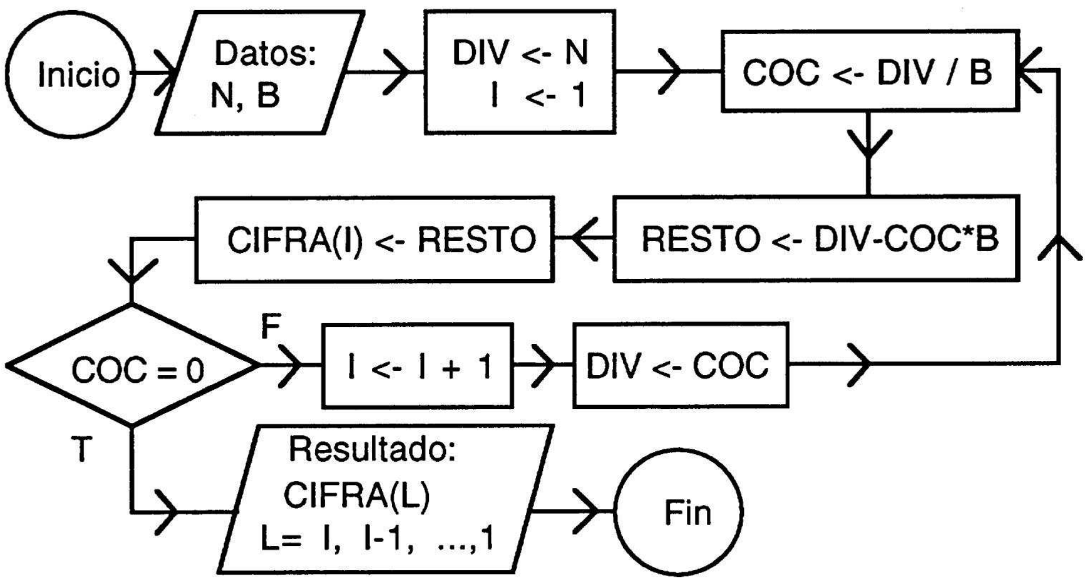
$$n_{p-1} = b * d_p + d_{p-1} .$$

Entonces, d_p es el cociente de la última división.

Dado que el valor de p no es conocido, y no se conoce el número de veces que tenemos que dividir entre b, el último cociente d_p se determina de esa manera (conocida como el **método de las divisiones sucesivas**), como el resto de la división por b que da un cociente cero.

En la figura 1 está representado el diagrama de flujo para el método de las divisiones sucesivas. En ese diagrama, N es el número entero para el cual queremos la representación en base B, $CIFRA$ es el vector con las cifras en la representación en base B, COC es el cociente de la división del dividendo DIV entre la base B. $RESTO$ es el resto de la división, e I es un índice con el cual se cuentan las cifras en la representación en base B.

Figura 1



Damos también las potencias de 2:
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64 = 8^2$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256 = 16^2$
$2^9 = 512 = 8^3$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096 = 8^4 = 16^3$

Siguiendo el esquema de la figura 1, es fácil verificar que, por ejemplo

$$1972_{10} = 11110110100_2 = 3664_8 = 7B4_{16}.$$

Construyamos ahora la representación en **base 2**. De hecho es:
$1972/2 = 986$ resto 0
$986/2 = 493$ resto 0
$493/2 = 246$ resto 1
$246/2 = 123$ resto 0
$123/2 = 61$ resto 1
$61/2 = 30$ resto 1
$30/2 = 15$ resto 0
$15/2 = 7$ resto 1
$7/2 = 3$ resto 1
$3/2 = 1$ resto 1
$1/2 = 0$ resto 1.
Luego $1972_{10} = 11110110100_2$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 11110110100_2 &= 1*2^{10} + 1*2^9 + 1*2^8 + 1*2^7 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^2 \\ &= 1024_{10} + 512_{10} + 256_{10} + 128_{10} + 32_{10} + 16_{10} + 4_{10} = 1972_{10} \end{aligned}$$

Construyamos ahora la representación en **base 8**:
$1972/8 = 246$ resto 4
$246/8 = 30$ resto 6
$30/8 = 3$ resto 6
$3/8 = 0$ resto 3
Entonces $1972_{10} = 3664_8$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 3664_8 &= 3*8^3 + 6*8^2 + 6*8^1 + 4*8^0 \\ &= 1536_{10} + 384_{10} + 48_{10} + 4_{10} = 1972_{10} \end{aligned}$$

Y para acabar construyamos la representación en **base 16**:
$1972/16 = 123$ resto 4
$123/16 = 7$ resto B
$7/16 = 0$ resto 7

Entonces $1972_{10} = 7B4_{16}$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 7B4_{16} &= 7 * 16^2 + B * 16^1 + 4 * 16^0 \\ &= 1792_{10} + 176_{10} + 4_{10} = 1972_{10}. \end{aligned}$$

Nótese que el primer resto obtenido en las divisiones es la cifra que tendrá su posición a la inmediata izquierda del punto raíz, así como el último resto obtenido es la cifra que tendrá su posición más a la izquierda del punto raíz.

Consideremos ahora el problema de construir la representación en base b de un número z real y positivo, menor que 1, del cual conocemos la representación decimal. Cada número menor que 1 se expresa en la base b en la forma:

$$z = q_1 * b^{-1} + q_2 * b^{-2} + q_3 * b^{-3} + ... \qquad (III.2)$$

donde $q_1, q_2, q_3, ...$ son enteros que tenemos que determinar para crear la representación

$$z_b = 0.\ q_1\ q_2\ q_3....$$

Supongamos que realizamos la multiplicación de z por b; entonces, de (III.2) obtenemos:

$$z * b = q_1 + q_2 * b^{-1} + q_3 * b^{-2} + ... = q_1 + z_1$$

por lo cual se deduce que q_1 es la parte entera de $z * b$, es decir

$$q_1 = [z * b],$$

y que z_1 es un número menor que 1, obtenido como diferencia del producto $z * b$ menos su parte entera. Del producto $z_1 * b = q_2 + z_2$ se deduce que

$$q_2 = [z_1 * b].$$

De manera análoga se sigue que

$$q_3 = [z_2 * b]$$

$$....$$

$$q_i = [z_{i-1} * b].$$

Este método es conocido con el nombre de **método de las multiplicaciones sucesivas**.

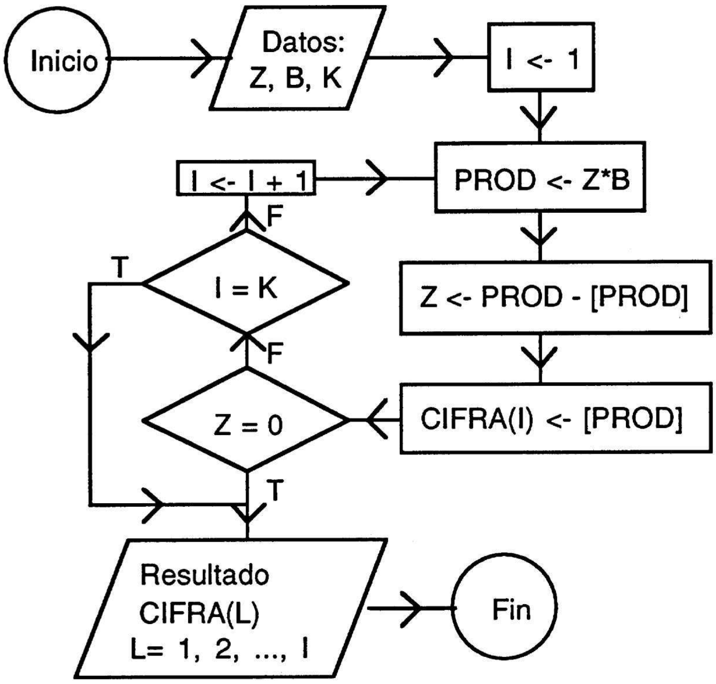
En la figura 2 está representado el diagrama de flujo para el método de las multiplicaciones sucesivas. En ese diagrama, Z es el número real positivo menor que 1, para el cual queremos la representación en base B, con no más de K cifras. $CIFRA$ es el vector con las cifras en la representación en base B, y $[PROD]$ es la parte entera del $PROD$.

Damos también las potencias negativas de 2:

$2^{-1} = 0.5$
$2^{-2} = 0.25$

$2^{-3} = 0.125 = 8^{-1}$
$2^{-4} = 0.0625 = 16^{-1}$
$2^{-5} = 0.03125$
$2^{-6} = 0.015625 = 8^{-2}$
$2^{-7} = 0.0078125$
$2^{-8} = 0.00390625 = 16^{-2}$

Figura 2



Siguiendo el esquema de figura 2, es fácil verificar que, por ejemplo:

$$0.828125_{10} = 0.110101_2 = 0.65_8 = 0.D4_{16} \ .$$

Construyamos ahora la representación en **base 2**. De hecho es:

$0.828125 * 2 = 1.65625$ parte entera 1
$0.65625 * 2 = 1.3125$ parte entera 1
$0.3125 * 2 = 0.625$ parte entera 0
$0.625 * 2 = 1.25$ parte entera 1
$0.25 * 2 = 0.5$ parte entera 0
$0.5 * 2 = 1.0$ parte entera 1
$0.0 * 2 = 0.0$

Entonces $0.828125_{10} = 0.110101_2$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 0.110101_2 &= 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-6} \\ &= 0.5_{10} + 0.25_{10} + 0.0625_{10} + 0.015625_{10} = 0.828125_{10} \end{aligned}$$

Construyamos ahora la representación en **base 8**:

$0.828125 * 8 = 6.625$ parte entera 6
$0.625 * 8 = 5.0$ parte entera 5

$0.0 * 8 = 0.0$

Entonces $0.828125_{10} = 0.65_8$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 0.65_8 &= 6 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2} \\ &= 6 * 0.125_{10} + 5 * 0.015625_{10} = 0.828125_{10} \end{aligned}$$

Y para concluir construyamos la representación en **base 16**:

$0.828125 * 16 = 13.25$ parte entera D

$0.25 * 16 = 4.0$ parte entera 4

$0.0 * 16 = 0.0$

Luego $0.828125_{10} = 0.D4_{16}$, y viceversa:

$$\begin{aligned} 0.D4_{16} &= 13 * 16^{-1} + 4 * 16^{-2} \\ &= 13 * 0.0625_{10} + 4 * 0.00390625_{10} = 0.828125_{10}. \end{aligned}$$

Nótese que la primera parte entera obtenida en las multiplicaciones es la cifra que tendrá su posición más a la inmediata derecha del punto raíz, así como la última parte entera obtenida es la cifra que tendrá su posición más a la derecha del punto raíz.

Aplicamos ahora el método de las multiplicaciones sucesivas para construir la representación en base 2 del número $z_{10} = 0.1_{10}$. Así:

$0.1 * 2 = 0.2$ parte entera 0

$0.2 * 2 = 0.4$ parte entera 0

$0.4 * 2 = 0.8$ parte entera 0

$0.8 * 2 = 1.6$ parte entera 1

$0.6 * 2 = 1.2$ parte entera 1

$0.2 * 2 = 0.4$ parte entera 0

$0.4 * 2 = 0.8$ parte entera 0

$0.8 * 2 = 1.6$ parte entera 1

$0.6 * 2 = 1.2$ parte entera 1

etc.

Por lo tanto tenemos

$$0.1_{10} = 0.000110011..._2 = 0.0\overline{0011}_2 \ .$$

Con ese ejemplo, hemos demostrado que un mismo número puede tener, en una base, una representación con un número finito de cifras, mientras que en otra base, puede tener una representación con un número infinito de cifras.

Está claro que ahora sabemos construir la representación en base b de un número real cualquiera. Por ejemplo, el número que en base 10 se reprenta por 1972.828125_{10}, está representado en las bases 2, 8 y 16, respectivamente por:

$$11110110100.110101_2 = 3664.65_8 = 7B4.D4_{16} \ .$$

Buscamos ahora la representación en base 2 del número real -25.375_{10}. Tenemos $25_{10} = 11001_2$, y $0.375_{10} = 0.011_2$. Entonces

$$-25.375_{10} = -11001.011_2 \ .$$

4. LAS OPERACIONES ARITMETICAS EN BASE b

Supongamos que tenemos que calcular la siguiente operación aritmética: $101_2 + 10_2$. Una manera de proceder es convertir los sumandos en base 10, ejecutar la suma, y después convertir el resultado en base 2. Si hacemos así, obtenemos:

$101_2 = 5_{10}, 10_2 = 2_{10}$
$5_{10} + 2_{10} = 7_{10}$
$7_{10} = 111_2$.

Ese método, sin embargo, no siempre es conveniente, sobre todo si pensamos que para las operaciones aritméticas de los números en base b valen las mismas reglas y propiedades formales conocidas en la aritmética en base 10. En el sistema de numeración binario existen sólo dos símbolos: 0_2 y 1_2. Entonces, cuando se efectua la operación $1_2 + 1_2$, no tenemos un único símbolo para representar el resultado, y el resultado es 0 con el reporte de 1, es decir 10_2.

Las reglas para efectuar la suma y la multiplicación de dos cifras binarias están resumidas en la tabla 1.

Tabla 1

+	0	1
0	0	1
1	1	10

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Damos también las tablas de la suma y la multiplicación en base 8 (tabla 2) y en base 16 (tabla 3).

Tabla 2

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Tabla 3

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Veamos ahora unos **ejemplos** de operaciones aritméticas con representaciones en base 2. Para cada operación se usan las tablas dadas, y por control se efectuan también las operaciones en base 10. De manera parecida se procede para las operaciones en bases 8 y 16.

1. Calcular la suma entre los dos números enteros 10001_2 y 11011_2.

$$\begin{array}{r} 10001_2 \\ +\ 11011_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 101100_2 \end{array}$$

Entonces, $10001_2 + 11011_2 = 101100_2$, $10001_2 = 17_{10}$, $11011_2 = 27_{10}$, $101100_2 = 44_{10}$.

2. Calcular el producto entre los dos números enteros 1101_2 y 1110_2.

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ *\ 1110_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 10110110_2 \end{array}$$

Entonces, $1101_2 * 1110_2 = 10110110_2$, $1101_2 = 13_{10}$, $1110_2 = 14_{10}$, $10110110_2 = 182_{10}$.

3. Calcular la diferencia entre los dos números enteros 10100_2 y 1101_2.

$$\begin{array}{r} 10100_2 \\ -\ \ 1101_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 111_2 \end{array}$$

Entonces, $10100_2 - 1101_2 = 111_2$, $10100_2 = 20_{10}$, $1101_2 = 13_{10}$, $111_2 = 7_{10}$.

4. Calcular la división entre los dos números enteros 11100_2 y 1001_2.

$$\begin{array}{lcl} 11100 & / & 1001 \\ 1001 & & \ \ 11 \\ \cdots\cdots & & \\ \ 1010 & & \\ \ 1001 & & \\ \cdots\cdots & & \\ \ \ \ \ 1 & & \end{array}$$

Entonces, el cociente y el resto de $11100_2/1001_2$ son, respectivamente, los números 11_2 y 1_2. En la representación decimal, $11100_2 = 28_{10}$, $1001_2 = 9_{10}$, y $28_{10}/9_{10}$ da como resultado 3_{10} y resto 1_{10}.

5. CONVERSION DESDE UN SISTEMA NUMERICO EN BASE b_1 A UN SISTEMA EN BASE b_2

El problema de la conversión de la representación de un mismo número real (no cero) desde una base b_1 a otra base b_2 se puede resolver de distintos modos.

Primer método. Una manera es convertir la representación del número, primero desde la base b_1 a la base 10, y después desde la base 10 a la nueva base b_2. Por ejemplo, para convertir el número X que en base 2 tiene la representación -11101.101_2 desde la base $b_1 = 2$ a la base $b_2 = 8$, se puede proceder de la manera siguiente. Construyamos la representación decimal de X, que se obtiene expresando X en la forma

$$X = -(1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3}) = -29.625_{10} ,$$

y luego se determina la representación de X en la base $b_2 = 8$ en la manera que ya conocemos, obteniendo

$$-11101.101_2 = -29.625_{10} = -35.5_8 .$$

Segundo método. Otra manera para obtener la conversión de las representaciones de X desde la base b_1 a la base b_2, no usa la representación decimal intermedia, sino aplica directamente los algoritmos usados para la conversión de un número decimal a la base b, con la condición que las operaciones sean ejecutadas en base b_1.

Por ejemplo, si queremos representar en base $b_2 = 8$ el número X que en base $b_1 = 2$ tiene la representación -11101.101_2, se procede de la forma siguente. Se convierte antes la parte entera del número desde la base 2 a la base 8, recordando que $b_2 = 8$ tiene la representación 1000_2, en base 2. Entonces,

$11101_2/1000_2 = 11_2$ resto 101_2

$11_2/1000_2 = 0$ resto 11_2 .

Dado que $101_2 = 5_8$ y $11_2 = 3_8$, obtenemos $11101_2 = 35_8$. Después se convierte desde base 2 a la base 8 la parte fraccionaria de X, obteniendo

$0.101_2 * 1000_2 = 101.0_2$ parte entera 101_2

$0.000_2 * 1000_2 = 0.0_2$

Dado que $101_2 = 5_8$, obtenemos $0.101_2 = 0.5_8$, y, concluyendo, resulta que

$$-11101.101_2 = -35.5_8 .$$

Otro ejemplo: supongamos que se desea construir la representación en base $b_2 = 16$ del número X que en base $b_1 = 8$ está representado por 2777.7661_8. Sabiendo que $b_2 = 16$ se representa en base 8 como 20_8, se convierte la parte entera de X desde la base 8 a la base 16:

$2777_8/20_8 = 137_8$ resto 17_8

$137_8/20_8 = 5_8$ resto 17_8

$5_8/20_8 = 0_8$ resto 5_8 .

Y dado que $17_8 = F_{16}$ y $5_8 = 5_{16}$, obtenemos $2777_8 = 5FF_{16}$. Convertimos ahora desde base 8 a base 16 la parte fraccionaria de X:

$0.7661_8 * 20_8 = 17.542_8$ parte entera 17_8
$0.5420_8 * 20_8 = 13.04_8$ parte entera 13_8
$0.0400_8 * 20_8 = 1.0_8$ parte entera 1_8
$0.0000_8 * 20_8 = 0.0_8$.

Y dado que $17_8 = F_{16}$, $13_8 = B_{16}$ y $1_8 = 1_{16}$, obtenemos $0.7661_8 = 0.FB1_{16}$. Entonces resulta que

$$2777.7661_8 = 5FF.FB1_{16} \ .$$

Tercer método. Otro método para obtener la conversión de un número X desde la base b_1 a la base b_2 es aplicable cuando $b_2 = b_1^k$, siendo k un entero mayor o igual que 2. La conversión se obtiene entonces de la manera siguiente. Sea n un entero positivo del cual tenemos la representación en base b_1. Entonces, descomponemos el alineamiento de los caracteres en agrupamientos, cada uno de k caracteres, partiendo de la derecha hacia la izquierda. Si el agrupamiento más a la izquierda tiene menos de k caracteres se añaden ceros para obtener un agrupamiento de k caracteres. Dado que la tabla:

$$\begin{array}{c} k \\ 000 \ ... \ 000_{b_1} = 0_{b_1^k} \\ 000 \ ... \ 001_{b_1} = 1_{b_1^k} \\ .... \\ 111 \ ... \ 111_{b_1} = (b_1^k - 1)_{b_1^k} \end{array}$$

da la representación en base b_1 de los enteros $0, 1, ..., (b_1^k - 1)$ representados en base b_1^k, se asocia a cada agrupamiento el correspondiente entero representado en base b_1^k, y el nuevo alineamiento es la representación en base b_1^k de n.

Tabla 4
$8 = 2^3$

$000_2 = 0_8$	
$001_2 = 1_8$	
$010_2 = 2_8$	
$011_2 = 3_8$	
$100_2 = 4_8$	
$101_2 = 5_8$	
$110_2 = 6_8$	
$111_2 = 7_8$	

Tabla 5
$16 = 2^4$

$0000_2 = 0_{16}$	$1000_2 = 8_{16}$
$0001_2 = 1_{16}$	$1001_2 = 9_{16}$
$0010_2 = 2_{16}$	$1010_2 = A_{16}$
$0011_2 = 3_{16}$	$1011_2 = B_{16}$
$0100_2 = 4_{16}$	$1100_2 = C_{16}$
$0101_2 = 5_{16}$	$1101_2 = D_{16}$
$0110_2 = 6_{16}$	$1110_2 = E_{16}$
$0111_2 = 7_{16}$	$1111_2 = F_{16}$

En las tablas 4 y 5 se dan las correspondencias entre las bases 2 y 8, y entre las bases 2 y 16. Esas tablas permiten la inmediata conversión de las representaciones de un número entero entre las bases 2, 8 y 16. Por ejemplo:

$$111010_2 = 111 \;\; 010_2 = 72_8$$
$$11001101001010_2 = 0011 \;\; 0011 \;\; 0100 \;\; 1010_2 = 334A_{16}$$
$$10101_2 = 010 \;\; 101_2 = 25_8$$
$$11001101001010_2 = 011 \;\; 001 \;\; 101 \;\; 001 \;\; 010_2 = 31512_8$$
$$111010_2 = 0011 \;\; 1010_2 = 3A_{16}$$

Consideramos ahora el caso en que z sea un número positivo menor que 1, del cual tenemos la representación en base b_1. Entonces, se descompone el alineamiento de los caracteres a la derecha del punto raíz, en agrupamientos de k caracteres, partiendo de la izquierda hacia la derecha, y completando el último agrupamiento (más a la derecha) con ceros. Como antes, usando la tabla de correspondencia entre la base b_1 y la base b_1^k, se asocia a cada agrupamiento la cifra correspondiente en base b_1^k. Por ejemplo, usando las tablas 4 y 5, obtenemos:

$$0.1_2 = 0.100_2 = 0.4_8$$
$$0.11111011_2 = 0.111 \;\; 110 \;\; 110_2 = 0.766_8 \; .$$

En el caso de un número real cualquiera, X, del cual tenemos la representación en base b_1, se consigue la representación en base b_1^k aplicando los métodos dados a su parte entera y a su parte fraccionaria. Por ejemplo:

$$11101.101_2 = 011 \;\; 101.101_2 = 35.5_8$$
$$11101.101_2 = 0001 \;\; 1101.1010_2 = 1D.A_{16}$$

Y viceversa, si tenemos la representación del número X en base $b_2 = b_1^k$, obtenemos su representación en base b_1, sustituyendo cada cifra representada en base b_1^k, con el correspondiente agrupamiento de k caracteres obtenido de la tablas de correspondencia. Por ejemplo:

$$2A_{16} = 0010 \;\; 1010_2 = 101010_2$$
$$-102_8 = -001 \;\; 000 \;\; 010_2 = -1000010_2$$
$$5FF.FB1_{16} = 0101 \;\; 1111 \;\; 1111.1111 \;\; 1011 \;\; 0001_2 = 10111111111.11111011_2 \; .$$

Para convertir un número desde su representación octal a su representación hexadecimal, se ejecuta un proceso con dos pasos. Antes el número octal se convierte a binario, y después los dígitos binarios se dividen en agrupamientos de cuatro dígitos y convertidos a las cifras hexadecimales. Por ejemplo:

$$14057_8 = 001 \;\; 100 \;\; 000 \;\; 101 \;\; 111_2 = 0001 \;\; 1000 \;\; 0010 \;\; 1111_2 = 182F_{16} \; .$$

Un procedimiento analogo se usa si se quiere convertir un número hexadecimal a su representación octal. Antes se escribe el número en su representación hexadecimal y se convierten los dígitos a los correspondientes agrupamientos de cuatro cifras binarias. Después esos dígitos binarios se dividen en agrupamientos de tres dígitos, y esos agrupamientos se escriben en cifras octales. Por ejemplo:

$$1F34B_{16} = 0001 \;\; 1111 \;\; 0011 \;\; 0100 \;\; 1011_2 =$$
$$= 011 \;\; 111 \;\; 001 \;\; 101 \;\; 001 \;\; 011_2 = 371513_8 \; .$$

EJERCICIOS.

1. Construir la representación en base $b = 10$ de los siguientes números:
a) 1532_{16} ; $12F_{16}$;
b) $82F_{16}$; $A2F_{16}$;
c) $F2F_{16}$; $1AB_{16}$.

2. Construir la representación en base $b = 10$ de los siguientes números:
a) 111_8 ; 117_8 ;
b) 177_8 ; 577_8 ;
c) 777_8 ; 1000_8 .

3. Dar la representación del número decimal 429_{10} en las bases:
a) $b = 16$;
b) $b = 8$;
c) $b = 2$;
d) $b = 3$.

4. Convertir el número $AF301_{16}$ a su representación en base $b = 8$.

5. Convertir el número 741731_8 a su representación en base $b = 16$.

6. Convertir el número $7214A_{16}$ a su representación en base $b = 8$.

7. Convertir el número 7214730152_8 a su representación en base $b = 16$.

8. Convertir el número 110111010111000010110111 a sus representaciones en base $b_1 = 8$ y $b_2 = 16$.

9. Convertir el número 101101110.11000010110111 a sus representaciones en base $b_1 = 8$ y $b_2 = 16$.

10. Calcular la suma, la diferencia, el producto, el cociente y el resto de la división entre los dos números:
a) $n_1 = 11011_2$, $n_2 = 110_2$;
b) $n_1 = 10101011_2$, $n_2 = 1010_2$.

11. Calcular el cociente y el resto de la división entre los dos números, y ejecutar en base $b = 8$ la prueba de la operación:
a) $n_1 = 3541.123_8$, $n_2 = 3.52_8$;
b) $n_1 = 73564.132_8$, $n_2 = 314.5_8$.

12. Calcular la diferencia entre los números enteros $F7A6_{16}$ y $BC43_{16}$.

13. Calcular el producto entre los números reales $40B.D_{16}$ y $2.A8_{16}$.