CAPITULO XXII. METODO DE NEWTON

1. INTRODUCCION Y METODO

Aún cuando el problema presentado en el ejemplo 2 del Capítulo XXI puede transformarse fácilmente en un formato convergente de punto fijo, esto no sucede frecuentemente. En este capítulo consideraremos un procedimiento algorítmico que puede usarse para realizar la transformación para un problema general.

Así como en el Capítulo IX hemos introducido el método de Newton-Raphson para la resolución del problema de la búsqueda de raíces de la ecuación $f(x) = 0$ usando un enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor, aquí también usaremos este procedimiento para introducir el método.

La forma general de un sistema de ecuaciones no lineales es:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \ , \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \ , \\ \ldots \quad \ldots &\quad \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{XXII.1}$$

Usando notación vectorial, el sistema $(XXII.1)$ asume la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ . \tag{XXII.2}$$

Resolveremos el sistema $(XXII.2)$ por el método de aproximaciones sucesivas. Supongamos que hemos hallado la aproximación k-ésima, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^t$, de una de las raíces separadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la ecuación vectorial $(XXII.2)$. La raíz exacta de $(XXII.2)$ puede representarse entonces como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \ , \tag{XXII.3}$$

donde $\varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \ldots, \varepsilon_n^{(k)})^t$ es la corrección (**error de la raíz**).

Sustituyendo $(XXII.3)$ en $(XXII.2)$, tenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = \mathbf{0} \ . \tag{XXII.4}$$

Suponiendo que la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable en un cierto dominio convexo que contiene a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^{(k)}$, desarrollemos el primer miembro de la ecuación $(XXII.4)$ en potencias del pequeño vector $\varepsilon^{(k)}$ limitándonos a los términos lineales,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \ \varepsilon^{(k)} = \mathbf{0} \ . \tag{XXII.5}$$

De la fórmula $(XXII.5)$ se deduce que la derivada $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ ha de ser considerada como la **matriz Jacobiana**, $J(\mathbf{x})$, del conjunto de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ con respecto a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; esto es,

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (XXII.6)$$

$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

El sistema $(XXII.5)$ es un sistema lineal en las correcciones $\varepsilon_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con la matriz $J(\mathbf{x}^{(k)})$, y de aquí que la fórmula $(XXII.5)$ pueda escribirse como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + J(\mathbf{x}^{(k)})\ \varepsilon^{(k)} = \mathbf{0} \ ,$$

de donde, dando por supuesto que la matriz $J(\mathbf{x}^{(k)})$ es no singular, tenemos

$$\varepsilon^{(k)} = -J^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \ .$$

En consecuencia

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \ , \qquad (XXII.7)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Para la aproximación de orden cero $\mathbf{x}^{(0)}$ podemos tomar un valor aproximado de la raíz deseada.

Ejemplo 1.

Usamos el método de Newton, con aproximación inicial $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5$, para aproximar la solución positiva del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \ , \\ 2\ x^2 + y^2 - 4\ z &= 0 \ , \\ 3\ x^2 - 4\ y + z^2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2\ x^2 + y^2 - 4\ z \\ 3\ x^2 - 4\ y + z^2 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.25 + 0.25 + 0.25 - 1 \\ 0.50 + 0.25 - 2.00 \\ 0.75 - 2.00 + 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{pmatrix} \ .$$

Calculemos ahora la matriz Jacobiana:

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ x & 2\ y & 2\ z \\ 4\ x & 2\ y & -4 \\ 6\ x & -4 & 2\ z \end{pmatrix} \ .$$

Por consiguiente tenemos

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \;,$$

y

$$\Delta = \det J(\mathbf{x}^{(0)}) = -40.0 \;.$$

De este modo sabemos ya que la matriz $J(\mathbf{x}^{(0)})$ es no singular. Calculemos la inversa

$$J^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix} \;.$$

Utilizando la fórmula $(XXII.7)$, obtendremos la primera aproximación:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(0)})\; \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.0 \\ -0.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.50 \\ 0.375 \end{pmatrix} \;. \end{aligned}$$

Para calcular la segunda aproximación $\mathbf{x}^{(2)}$, calculemos previamente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.875^2 + 0.5^2 + 0.375^2 - 1 \\ 2\; 0.875^2 + 0.5^2 - 4\; 0.375 \\ 3\; 0.875^2 - 4\; 0.5 + 0.375^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{pmatrix} \;,$$

y

$$J(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.75 & 1 & 0.75 \\ 3.50 & 1 & -4 \\ 5.25 & -4 & 0.75 \end{pmatrix} \;.$$

Por consiguiente

$$\Delta = \det J(\mathbf{x}^{(1)}) = -64.75 \;,$$

y

$$J^{-1}(\mathbf{x}^{(1)}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{pmatrix} \;.$$

Utilizando la fórmula $(XXII.7)$, obtendremos la segunda aproximación:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(1)})\; \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.50 \\ 0.375 \end{pmatrix} + \frac{1}{64.75} \begin{pmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.50 \\ 0.375 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.08519 \\ 0.00338 \\ 0.00507 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78981 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{pmatrix} \;. \end{aligned}$$

Las aproximaciones siguientes se hallan análogamente:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.36992 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0.00001 \\ 0.00004 \\ 0.00005 \end{pmatrix} ,$$

y así sucesivamente. Finalizando con la tercera aproximación, tenemos:

$$x = 0.78521, \qquad y = 0.49662, \qquad z = 0.36992 .$$

Ejemplo 2.

Queremos aproximar las soluciones positivas del sistema de ecuaciones no lineales dado por

$$x_1 + 3\ \log_{10} x_1 - x_2^2 = 0 ,$$
$$2\ x_1^2 - x_1\ x_2 - 5\ x_1 + 1 = 0 .$$

Las curvas definidas en el sistema dado se cortan aproximadamente en los puntos M_1 $(1.4, -1.5)$ y M_2 $(3.4, 2.2)$. Comenzando con la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (3.4, 2.2)^t$ calculemos las segundas aproximaciones de la raíz, efectuando los cálculos con cinco digítos significativos. Tenemos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3.4 + 3\ \log_{10} 3.4 - 2.2^2 \\ 2\ 3.4^2 - 3.4\ 2.2 - 5\ 3.4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15440 \\ -0.36000 \end{pmatrix} .$$

Calculemos ahora la matriz Jacobiana:

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3\ M}{x_1} & -2\ x_2 \\ 4\ x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{pmatrix} ,$$

donde $M = 0.43429$; por consiguiente

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3\ 0.43429}{3.4} & -2\ 2.2 \\ 4\ 3.4 - 2.2 - 5 & -3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3832 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{pmatrix} ,$$

y

$$\Delta = \det J(\mathbf{x}^{(0)}) = 23.457 .$$

De este modo, la matriz $J(\mathbf{x}^{(0)})$ es no singular. Calculemos la inversa

$$J^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{pmatrix} .$$

Utilizando la fórmula $(XXII.7)$, obtendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(0)})\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \\ &= \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{pmatrix} - \frac{1}{23.457} \begin{pmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1544 \\ -0.3600 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.089909 \\ 0.063354 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4899 \\ 2.2634 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Las aproximaciones siguientes se hallan de forma análoga; los resultados se dan en la tabla siguiente:

Tabla 1

k	$x_1^{(k)}$	$\varepsilon_1 = \Delta x_1$	$x_2^{(k)}$	$\varepsilon_2 = \Delta x_2$
0	3.4	$+0.089909$	2.2	$+0.063354$
1	3.4899	-0.0008	2.2634	-0.0012
2	3.4891	-0.0016	2.2621	-0.0005
3	3.4875		2.2616	

Finalizando con la aproximación $\mathbf{x}^{(3)}$, tenemos

$$x_1 = 3.4875, \quad x_2 = 2.2616 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(3)}) = (0.0002, 0.0)^t \ .$$

Además del enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor, para construir el algoritmo que nos llevó a un método apropiado de punto fijo en el caso unidimensional, en el Capítulo X, tratamos de encontrar una función ϕ con la propiedad de que

$$g(x) = x - \phi(x)\ f(x)\ , \tag{XXII.8}$$

dando convergencia cuadrática al punto fijo p de g. De esta condición surgió el método de Newton, escogiendo $\phi(x) = 1/f'(x)$.

Usando un enfoque similar para el caso $n-$dimensional, es necesaria una matriz

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \dots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & \dots & a_{2n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & a_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{XXII.9}$$

donde cada una de las componentes $a_{ij}(\mathbf{x})$ sea una función de $\mathcal{R}^n$ a $\mathcal{R}$. El procedimiento requiere encontrar una matriz $A(\mathbf{x})$ tal que

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\ , \tag{XXII.10}$$

dé convergencia cuadrática a la solución de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, siempre que, desde luego, $A(\mathbf{x})$ sea no singular en el punto fijo de $\mathbf{G}$. El siguiente Teorema verifica que este enfoque puede usarse para justificar la elección de A.

Teorema XXII.1

Supóngase que $\mathbf{p}$ es una solución de $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, para alguna función $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$, que manda a $\mathcal{R}^n$ en $\mathcal{R}^n$. Si existe un número $\delta > 0$ con la propiedad de que

i) $\partial g_i/\partial x_j$ es continua en $N_\delta = \{\mathbf{x} \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| < \delta\}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$,

ii) $\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)$ es continua y $|\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)| \le M$ para alguna constante M, siempre que $\mathbf{x} \in N_\delta$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ y $k = 1, 2, \dots, n$,

iii) $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_j = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces existe un número $\tilde{\delta} \leq \delta$ tal que la sucesión generada por $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ converge cuadráticamente a $\mathbf{p}$ para cualquier $\mathbf{x}^{(0)}$ siempre que $||\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}|| < \tilde{\delta}$. Además,

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}||_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \, ||\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}||_\infty^2 \qquad \text{para cada } k \geq 1 \; .$$

Este Teorema es extensión del Teorema X.1 y su demostración requiere que se pueda expresar $\mathbf{G}$ en términos de su serie de Taylor en n variables alrededor del punto $\mathbf{p}$.

Para utilizar el Teorema XXII.1, supongamos que $A(\mathbf{x})$ es una matriz $n \times n$ de funciones de $\mathcal{R}^n$ a $\mathcal{R}$ en la forma de la ecuación $(XXII.8)$, donde las componentes específicas se escogerán más adelante. Supongamos además, que $A(\mathbf{x})$ es no singular cerca de una solución $\mathbf{p}$ de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y denotemos por $b_{ij}(\mathbf{x})$ a la componente de $A(\mathbf{x})^{-1}$ en el $i-$ésima fila y en la $j-$ésima columna. Como $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1} \, \mathbf{F}(\mathbf{x})$,

$$g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) \; f_j(\mathbf{x}) \; ;$$

así que

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \; f_j(\mathbf{x}) \; , & \text{si } k = i \; ; \\ - \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \; f_j(\mathbf{x}) \; , & \text{si } k \neq i \; . \end{cases}$$

El Teorema XXII.1 implica que necesitamos tener $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $k = 1, 2, \ldots, n$. Esto significa que para $k = i$,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{p})}{\partial x_i} \; ,$$

con lo que

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{p})}{\partial x_i} = 1 \; , \qquad (XXII.11)$$

y cuando $k \neq i$,

$$0 = - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{p})}{\partial x_k} \; ,$$

con lo que

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \; \frac{\partial f_j(\mathbf{p})}{\partial x_k} = 0 \; . \qquad (XXII.12)$$

Usando la matriz Jacobiana $J(\mathbf{x})$, vemos que las condiciones $(XXII.11)$ y $(XXII.12)$ requieren que

$$A(\mathbf{p})^{-1} \; J(\mathbf{p}) = I \; ,$$

y por lo tanto

$$A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p}) \ .$$

Una elección apropiada para $A(\mathbf{x})$ es consecuentemente $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$, ya que la condición (iii) del Teorema XXII.1 se satisface con esta elección.

La función $\mathbf{G}$ se define como

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1} \ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \ ,$$

y el procedimiento de iteración funcional surge de seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$ y de generar, para $k \geq 1$,

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \ . \qquad (XXII.13)$$

Este método se llama **método de Newton para sistemas no lineales** y se espera que generalmente dé convergencia cuadrática siempre y cuando se conozca un valor inicial lo suficientemente exacto y que $J(\mathbf{p})^{-1}$ exista.

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Una debilidad clara del procedimiento del método de Newton surge de la necesidad de invertir la matriz $J(\mathbf{x})$ en cada paso. En la práctica, el método se realiza generalmente en una forma de dos pasos. Primero, se encuentra un vector $\mathbf{y}$ que satisfaga

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) \ \mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \ .$$

Después de que se ha logrado esto, la nueva aproximación $\mathbf{x}^{(k+1)}$ se puede obtener sumando $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}^{(k)}$; es decir,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y} \ .$$

El siguiente algoritmo usa este procedimiento de dos pasos.

Algoritmo del método de Newton para sistemas no lineales.

==

Para aproximar una solución del sistema no lineal $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, dada una aproximación inicial $\mathbf{x}$:

Entrada: número n de ecuaciones e incógnitas; aproximación inicial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ o mensaje de que el número de iteraciones fue excedido.

Paso 1: tomar $k = 1$;

Paso 2: mientras que $k \leq N_0$ seguir pasos 3–7;

Paso 3: calcular $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y $J(\mathbf{x})$, donde $(J(\mathbf{x}))_{ij} = (\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$;

Paso 4: resolver el sistema lineal de $J(\mathbf{x}) \ \mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$;

Paso 5: tomar $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

Paso 6: si $||\mathbf{y}|| < TOL$ entonces SALIDA ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 7: tomar $k = k + 1$;

Paso 8: SALIDA ($'$*Número máximo* N_0 *de iteraciones excedido,* $N_0 = \ ', N_0$);
PARAR.

==

Ejemplo 3.

Consideremos el sistema no lineal dado por

$$
\begin{aligned}
3\ x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} &= 0\ ,\\
x_1^2 - 81\ (x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0\ ,\\
e^{-x_1 x_2} + 20\ x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0\ .
\end{aligned}
$$

En el ejemplo 2 del capítulo XXI se demostró que este sistema no lineal tenía una solución aproximada en $(0.5, 0, -0.52359877)^t$. Se usará el método de Newton para obtener esta aproximación cuando la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$.

La matriz Jacobiana $J(\mathbf{x})$ para este sistema está dada por

$$
J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & x_3\ \sin(x_2 x_3) & x_2\ \sin(x_2 x_3) \\ 2\ x_1 & -162\ (x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2\ e^{-x_1 x_2} & -x_1\ e^{-x_1 x_2} & 20 \end{pmatrix}\ ,
$$

y

$$
\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{pmatrix}\ ,
$$

donde

$$
\begin{pmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{pmatrix} = -[J(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)})]^{-1}\ \mathbf{F}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)})\ .
$$

Por lo tanto, en el $k-$ésimo paso, se debe resolver el sistema lineal

$$
\begin{pmatrix} 3 & x_3^{(k-1)}\ \sin(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) & x_2^{(k-1)}\ \sin(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) \\ 2\ x_1^{(k-1)} & -162\ (x_2^{(k-1)} + 0.1) & \cos x_3^{(k-1)} \\ -x_2^{(k-1)}\ e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)}\ e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} & 20 \end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3\ x_1^{(k-1)} - \cos(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) - \frac{1}{2} \\ (x_1^{(k-1)})^2 - 81\ (x_2^{(k-1)} + 0.1)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06 \\ e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} + 20\ x_3^{(k-1)} + \frac{10\pi - 3}{3} \end{pmatrix}\ .
$$

Los resultados obtenidos usando este procedimiento iterativo se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	—
1	0.50003702	0.01946686	−0.52152047	0.422
2	0.50004593	0.00158859	−0.52355711	1.79×10^{-2}
3	0.50000034	0.00001244	−0.52359845	1.58×10^{-3}
4	0.50000000	0.00000004	−0.52359877	1.24×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000000	−0.52359877	0

Nótese que la convergencia del método de Newton se hace muy rápida una vez que estamos cerca de la solución $\mathbf{p}$. Esto ilustra la convergencia cuadrática del método cerca de la solución.

EJERCICIOS.

1. Encontrar una solución a los siguientes sistemas no lineales usando el método de Newton, y calcular la cota de error dada en el Teorema XXII.1. Iterar hasta que $||\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}||_\infty < 10^{-5}$.

$$(a) \qquad \begin{aligned} & x_1^2 - 10\ x_1 + x_2^2 + 8 = 0\ , \\ & x_1\ x_2^2 + x_1 - 10\ x_2 + 8 = 0\ . \end{aligned}$$

$$(b) \qquad \begin{aligned} & 3\ x_1^2 - x_2^2 = 0\ , \\ & 3\ x_1\ x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0\ . \end{aligned}$$

Comparar la convergencia con la de los ejercicios 1 y 2 del Capítulo XXI.

2. Encontrar una solución a los siguientes sistemas no lineales usando el método de Newton, y calcular la cota de error dada en el Teorema XXII.1. Iterar hasta que $||\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}||_\infty < 10^{-5}$.

$$(a) \qquad \begin{aligned} & x_1^2 + x_2 - 37 = 0\ , \\ & x_1 - x_2^2 - 5 = 0\ , \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\ . \end{aligned}$$

$$(b) \qquad \begin{aligned} & 12\ x_1 - 3\ x_2^2 - 4\ x_3 = 7.17\ , \\ & x_1^2 + 10\ x_2 - x_3 = 11.54\ , \\ & x_2^3 + 7\ x_3 = 7.631\ . \end{aligned}$$

3. Encontrar una solución diferente de $(1,1,1)^t$ a los siguientes sistemas no lineales usando el método de Newton, y calcular la cota de error dada en el Teorema XXII.1. Iterar hasta que $||\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}||_\infty < 10^{-5}$.

$$(a) \qquad \begin{aligned} & 2\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5 = 0\ , \\ & x_1 + 2\ x_2 + x_3 + x_4 - 5 = 0\ , \\ & x_1 + x_2 + 2\ x_3 + x_4 - 5 = 0\ , \\ & x_1\ x_2\ x_3\ x_4 - 1 = 0\ . \end{aligned}$$

$$(b) \qquad \begin{aligned} & 2\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0\ , \\ & x_1 + 2\ x_2 + x_3 - 4 = 0\ , \\ & x_1\ x_2\ x_3 - 1 = 0\ . \end{aligned}$$