CAPITULO XV. ESTRATEGIAS DE PIVOTEO

1. INTRODUCCION Y METODO

Durante la derivación del algoritmo de la eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, se encontró que para obtener un cero para el elemento pivote $a_{kk}^{(k)}$ era necesario un intercambio de filas de la forma $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ donde $k+1 \le p \le n$ era el entero más pequeño con $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. En la práctica frecuentemente es deseable realizar intercambios de las filas que contienen a los elementos pivote, aun cuando éstos no sean cero. Cuando los cálculos se realizan usando aritmética de dígitos finitos, como sería el caso de las soluciones generadas con calculadora u ordenador, un elemento pivote que sea pequeño comparado con los elementos de debajo de él en la misma columna puede llevar a un error de redondeo sustancial. En el ejemplo siguiente se da una ilustración de esta dificultad.

Ejemplo 1.

El sistema lineal

$$\begin{array}{rrcrcr} E_1: & 0.003\, x_1 & + & 59.14\, x_2 & = & 59.17\ , \\ E_2: & 5.291\, x_1 & - & 6.130\, x_2 & = & 46.78\ , \end{array}$$

tiene la solución exacta $x_1 = 10.00$ y $x_2 = 1.000$.

Para ilustrar las dificultades del error de redondeo, se aplicará eliminación Gaussiana a este sistema usando aritmética de cuatro dígitos con redondeo.

El primer elemento pivote es $a_{11}^{(1)} = 0.003$ y su multiplicador asociado es

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.\overline{6}\ ,$$

el cual se redondea a 1764. Efectuando la operación $(E_2 - m_{21}E_1) \to (E_2)$ y el redondeo apropiado ($1764 \cdot 59.14 = 104322 = 104300$ y $1764 \cdot 59.17 = 104375 = 104400$),

$$\begin{array}{rcrcr} 0.003\, x_1 & - & 59.14\, x_2 & = & 59.17\ , \\ & - & 104300\, x_2 & = & -104400\ . \end{array}$$

La sustitución hacia atrás implica que

$$x_2 = 1.001\ , \qquad x_1 = \frac{59.17 - 59.14 \cdot 1.001}{0.003} = \frac{59.17 - 59.20}{0.003} = -\frac{0.030}{0.003} = -10.00\ .$$

El error absoluto tan grande en la solución numérica de x_1 resulta del error pequeño de 0.001 al resolver para x_2. Este error absoluto fue amplificado por un factor de 20000 en la solución de x_1 debido al orden en el que fueron realizados los cálculos.

El ejemplo 1 ilustra las dificultades que pueden surgir en algunos casos cuando el elemento pivote $a_{kk}^{(k)}$ es pequeño en relación a los elementos $a_{ij}^{(k)}$ para $k \le i \le n$ y $k \le j \le n$. Las estrategias de pivoteo se llevan a cabo en general seleccionando un nuevo elemento como pivote $a_{pq}^{(k)}$ intercambiando las filas k y p, e intercambiando las columnas k y q, si es necesario. La estrategia más simple consiste en seleccionar el elemento en la misma columna que está debajo de la diagonal y que tiene el mayor valor absoluto; es decir, se determina p tal que

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}| ,$$

y se efectúa $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$. En este caso no se considera un intercambio de columnas.

Ejemplo 2.

Reconsideremos el sistema lineal del ejemplo 1:

$$\begin{array}{rlcrcl} E_1 : & 0.003\ x_1 & + & 59.14\ x_2 & = & 59.17\ , \\ E_2 : & 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78\ . \end{array}$$

Usando el procedimiento de pivoteo descrito arriba resulta que primero se encuentra

$$\max\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\} = \max\{|0.003|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}^{(1)}| .$$

Así, se realiza la operación $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ la cual da el sistema

$$\begin{array}{rlcrcl} E_1 : & 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78\ , \\ E_2 : & 0.003\ x_1 & + & 59.14\ x_2 & = & 59.17\ . \end{array}$$

El multiplicador para este sistema es

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567 ,$$

y la operación $(E_2 - m_{21} E_1) \to (E_2)$ con el redondeo apropiado ($0.000567 \cdot 6.13 = 0.003476$ y $0.000567 \cdot 46.78 = 0.02652$) reduce el sistema a

$$\begin{array}{rcrcl} 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78\ , \\ & & 59.14\ x_2 & = & 59.14\ . \end{array}$$

Las respuestas con cuatro dígitos que resultan de la sustitución hacia atrás son los valores correctos $x_1 = 10.00$ y $x_2 = 1.000$.

Esta técnica se conoce como **pivoteo máximo de columna** o **pivoteo parcial**.

2. ALGORITMOS DE ELIMINACION GAUSSIANA CON PIVOTEO

A continuación se presenta el algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial (pivoteo máximo de columna). Los procedimientos detallados en este algoritmo son suficientes para garantizar que cada multiplicador m_{ij} tiene una magnitud que no excede a uno.

Algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna.

==

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$:

$$\begin{array}{rl} E_1 : & a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = a_{1,n+1} \\ E_2 : & a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = a_{2,n+1} \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ E_n : & a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = a_{n,n+1} \end{array}$$

Entrada: número de incógnitas y de ecuaciones n; matriz ampliada $A_a = (a_{ij}) = (a(i,j))$ donde $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n+1$.

Salida: solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ó mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

Paso 1: Para $i = 1, 2, \ldots, n$ tomar $F(i) = i$;
(inicializar el indicador de la fila).

Paso 2: Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ seguir los pasos 3–6 *(proceso de eliminación).*

Paso 3: Sea p el menor entero con $i \le p \le n$ y

$$|a(F(p), i)| = \max_{i \le j \le n} |a(F(j), i)| \ .$$

Paso 4: Si $a(F(p), i) = 0$ entonces SALIDA;
(no existe solución única) PARAR.

Paso 5: Si $F(i) \ne F(p)$ entonces tomar $AUX = F(i)$, $F(i) = F(p)$, $F(p) = AUX$; *(intercambio de filas simulado).*

Paso 6: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ seguir los pasos 7 y 8.

Paso 7: Tomar $m(F(j), i) = \frac{a(F(j),i)}{a(F(i),i)}$.

Paso 8: Efectuar $(E_{F(j)} - m(F(j), i)\ E_{F(i)}) \to (E_{F(j)})$.

Paso 9: Si $a(F(n), n) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 10: *(Empieza la sustitución hacia atrás)*; tomar

$$x_n = \frac{a(F(n), n+1)}{a(F(n), n)} \ .$$

Paso 11: Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ tomar

$$x_i = \frac{a(F(i), n+1) - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a(F(i), j)\ x_j}{a(F(i), i)} \ .$$

Paso 12: SALIDA $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR.

==

Aún cuando la estrategia del pivoteo máximo de columna es suficiente para la mayoría de los sistemas lineales, se presentan a veces situaciones en las que esta estrategia resulta inadecuada.

Ejemplo 3.

El sistema lineal:

$$\begin{array}{rrcrcr} E_1 : & 30.00\ x_1 & + & 591400\ x_2 & = & 591700\ , \\ E_2 : & 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78\ , \end{array}$$

es el mismo sistema que el presentado en los ejemplos previos excepto que todos los coeficientes en la primera ecuación están multiplicados por 10^4. El procedimiento descrito en el algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna con aritmética de 4 dígitos lleva a los mismos resultados que se obtuvieron en el primer ejemplo.

El máximo valor en la primera columna es 30.00 y el multiplicador

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

y la operación $(E_2 - m_{21} E_1) \to (E_2)$ con el redondeo apropiado $(0.1764 \cdot 591400 = 104322 = 104300$ y $0.1764 \cdot 591700 = 104375 = 104400)$ transformaría el sistema en

$$\begin{array}{rcrcr} 30.00\, x_1 & + & 591400\, x_2 & = & 591700\ , \\ & - & 104300\, x_2 & = & -104400\ , \end{array}$$

el cual tiene soluciones $x_2 = 1.001$ y $x_1 = -10.00$.

Para el sistema del ejemplo 3 es apropiada una técnica conocida como **pivoteo escalado de columna**. El primer paso en este procedimiento consiste en definir un factor de escala s_l para cada fila $l = 1, \ldots, n$

$$s_l = \max_{1 \le j \le n} |a_{lj}|\ .$$

Si $s_l = 0$ para algún l, los Teoremas XIII.3 y XIII.4 implican que no existe solución única y el procedimiento se detiene. El intercambio apropiado de filas para luego obtener ceros en la primera columna queda determinado escogiendo el primer entero $1 \le k \le n$ con

$$\frac{|a_{k1}|}{s_k} = \max_{1 \le j \le n} \frac{|a_{j1}|}{s_j}\ ,$$

y realizando $(E_1) \leftrightarrow (E_k)$. Igualmente, al paso generico i, el intercambio apropiado para llevar el elemento pivote a_{ii} en su posición, queda determinado escogiendo el menor entero k, $i \le k \le n$, con

$$\frac{|a_{ki}|}{s_k} = \max_{i \le j \le n} \frac{|a_{ji}|}{s_j}\ ,$$

y realizando $(E_i) \leftrightarrow (E_k)$. Si al efectuar este intercambio no se variían los factores de escala, diremos que estamos aplicando una estrategia de **pivoteo escalado de columna con factores de escalas fijos**. Por otra parte, otra estategia es efectuar también el intercambio $(s_i) \leftrightarrow (s_k)$ si se está haciendo el intercambio de filas $(E_i) \leftrightarrow (E_k)$ $(1 \le i \le n$, $i \le k \le n)$. En este caso diremos que se aplica la estrategia de pivoteo escalado de columna con intercambio completo o simplemente **pivoteo escalado de columna**.

Una modificación de esta técnica de pivoteo escalado de columna, que llameremos **pivoteo escalado de columna modificado**, consiste en redefinir los factores de escala a cada paso, es decir, al paso i-ésimo de nuestro algoritmo $(1 \le i \le n)$ se definen los factores de escala s_l para cada fila $l = i, \ldots, n$

$$s_l = \max_{i \le j \le n} |a_{lj}|\ .$$

Entonces, el intercambio apropiado de filas para llevar el elemento pivote a_{ii} en su posición queda determinado escogiendo el primer entero k, $i \leq k \leq n$, con

$$\frac{|a_{ki}|}{s_k} = \max_{i\leq j\leq n} \frac{|a_{j1}|}{s_j} \ ,$$

y realizando luego $(E_i) \leftrightarrow (E_k)$.

El efecto de escalar consiste en asegurar que el elemento mayor de cada fila tenga una magnitud relativa de uno antes de que se empiece la comparación para el intercambio de filas. El escalamiento se hace solamente con propósitos de comparación, así que la división entre los factores de escala no produce un error de redondeo en el sistema.

Aplicando la técnica de pivoteo escalado de columna al ejemplo 3 da

$$s_1 = \max\{|30.00|, |591400|\} = 591400 \ ,$$

$$s_2 = \max\{|5.291|, |-6.130|\} = 6.130 \ .$$

Consecuentemente,

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073 \times 10^{-4} \qquad \text{y} \qquad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631 \ ,$$

y por lo cual se hace el intercambio $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$.

Aplicando eliminación Gaussiana, el nuevo sistema

$$\begin{array}{rcrcr} 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78 \ , \\ 30.00\ x_1 & + & 591400\ x_2 & = & 591700 \ , \end{array}$$

producirá los resultados correctos $x_1 = 10.00$ y $x_2 = 1.000$. De hecho, el multiplicador es

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{30.00}{5.291} = 5.67 \ ,$$

y la operación $(E_2 - m_{21} E_1) \to (E_2)$ (con $5.67 \cdot 6.13 = 34.76$ y $5.67 \cdot 46.78 = 256.2$) reduce el sistema a

$$\begin{array}{rcrcr} 5.291\ x_1 & - & 6.130\ x_2 & = & 46.78 \ , \\ & & 591400\ x_2 & = & 591400 \ . \end{array}$$

Las respuestas con cuatro dígitos que resultan de la sustitución hacia atrás son los valores correctos $x_1 = 10.00$ y $x_2 = 1.000$.

Algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo escalado de columna.

==

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$:

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = a_{1,n+1} \\ E_2 : &\quad a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = a_{2,n+1} \\ &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ E_n : &\quad a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = a_{n,n+1} \end{aligned}$$

Entrada: número de incógnitas y de ecuaciones n; matriz ampliada $A_a = (a_{ij}) = (a(i,j))$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n+1$.

Salida: solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ó mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

Paso 1: Para $i = 1, 2, \ldots, n$ tomar

$$s_i = s(i) = \max_{1 \leq j \leq n} |a(i,j)| \ ;$$

si $s_i = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR. Tomar $F(i) = i$; *(inicializar el indicador de la fila).*

Paso 2: Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ seguir los pasos 3–6 *(proceso de eliminación).*

Paso 3: Sea p el menor entero con $i \leq p \leq n$ y

$$\frac{|a(F(p),i)|}{s(F(p))} = \max_{i \leq j \leq n} \frac{|a(F(j),i)|}{s(F(j))} \ .$$

Paso 4: Si $a(F(p),i) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 5: Si $F(i) \neq F(p)$ entonces tomar $AUX = F(i)$, $F(i) = F(p)$, $F(p) = AUX$; *(intercambio de filas simulado).*

Paso 6: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ seguir los pasos 7 y 8.

Paso 7: Tomar $m(F(j),i) = \frac{a(F(j),i)}{a(F(i),i)}$.

Paso 8: Efectuar $(E_{F(j)} - m(F(j),i) \ E_{F(i)}) \to (E_{F(j)})$.

Paso 9: Si $a(F(n),n) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 10: *(Empieza la sustitución hacia atrás)*; tomar

$$x_n = \frac{a(F(n),n+1)}{a(F(n),n)} \ .$$

Paso 11: Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ tomar

$$x_i = \frac{a(F(i),n+1) - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a(F(i),j) \ x_j}{a(F(i),i)} \ .$$

Paso 12: SALIDA $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; *(procedimiento completado satisfactoriamente)* PARAR.

==

Los cálculos adicionales requeridos para el pivoteo escalado de columna resultan primero de la determinación de los factores de escala, es decir $(n-1)$ comparaciones para cada uno de las n filas, que da un total de

$$n(n-1) \quad \text{comparaciones} \ .$$

Para determinar el primer intercambio correcto, se realizan n divisiones y se hacen $(n-1)$ comparaciones. La determinación del primer intercambio entonces, añade un total de

$$\textit{comparaciones} \quad n(n-1) + (n-1) \quad \text{y} \quad \textit{divisiones} \quad n \ .$$

Como los factores de escala se calculan sólo una vez, el segundo paso requiere solamente

$$\textit{comparaciones} \quad (n-2) \quad \text{y} \quad \textit{divisiones} \quad (n-1) \; .$$

Procediendo de manera similar, el procedimiento de pivoteo escalado de columna agrega un total de

$$\textit{comparaciones} \quad (n-1) + \sum_{k=2}^{n} (k-1) = \frac{3}{2} n(n-1)$$

y

$$\textit{divisiones} \quad \sum_{k=2}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \; ,$$

al procedimiento de eliminación Gaussiana. El tiempo requerido para realizar una comparación es comparable, aunque un poco mayor, al de suma/resta. Entonces la técnica de escalamiento no incrementa significativamente el tiempo de cómputo requerido para resolver un sistema para valores grandes de n.

Si un sistema garantiza el tipo de pivoteo que da un pivoteo escalado de columna modificado, entonces se debe usar **pivoteo máximo** o **total**. Es decir, este pivoteo máximo en el $k-$ésimo paso busca todos los elementos

$$a_{ij} \quad \text{para} \quad i = k, k+1, \ldots, n, \quad \text{y} \quad j = k, k+1, \ldots, n,$$

para encontrar el elemento que tiene la magnitud más grande. Se realizan intercambios de filas y de columnas para traer este elemento a la posición pivote.

El primer paso de pivoteo total requiere que se realicen $(n^2 - 1)$ comparaciones, el segundo paso requiere $[(n-1)^2 - 1]$ comparaciones, y así sucesivamente. El tiempo total adicional requerido para incorporar el pivoteo total en la eliminación Gaussiana es consecuentemente

$$\textit{comparaciones} \quad \sum_{k=2}^{n} (k^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \; .$$

Este número es comparable con el número requerido por una técnica de pivoteo de columna modificada, pero no es necesaria ninguna división. El pivoteo total es consecuentemente la estrategia recomendada para la mayoría de los sistemas complicados para los cuales se puede justificar la cantidad de tiempo de ejecución tan intensa.

3. EJEMPLO DE ALGORITMO FORTRAN

En esta sección vamos a presentar una versión FORTRAN muy sencilla del algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna. En el esquema de la programación estructurada FORTRAN, el problema de la búsqueda de solución de un sistema de ecuaciones lineales será desarrollado dividiéndolo en un programa principal y en varios subprogramas, donde cada uno de ellos resuelve una tarea particular. En nuestro caso, el problema será resuelto usando un programa principal que llama a la subrutina MATRIZA, para la lectura de los elemento de la matriz ampliada A_a, correspondiente al sistema dado $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y a las subrutinas GAUSELI, GAUSMAX o GAUSESC, dependiendo de qué método se quiere usar, para el desarrollo del algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo, la primera, con pivoteo máximo de columna, la segunda, y con pivoteo escalado de columna, la tercera. Aquí se dará solamente la versión FORTRAN de la subrutina GAUSMAX (las otras se pueden obtener de ésta con sencillas modificaciones).

```
C      PROGRAMA PRINCIPAL
       PROGRAM SISLIN
       PARAMETER (M = 20, MM = 21)
       REAL XX(M), AA(M,MM)
       INTEGER N, I, J, INDEX
       EXTERNAL MATRIZA, GAUSELI, GAUSMAX, GAUSESC
C
       PRINT*, 'NUMERO DE DIMENSION MAXIMA', M
       PRINT*, 'DAR LA DIMENSION DEL PROBLEMA'
       READ*, N
       PRINT*, 'ESCOGER EL METODO A USAR'
       PRINT*, 'INDEX = 0, ELIMINACION GAUSSIANA CON'
       PRINT*, '   SUSTITUCION HACIA ATRAS SIN PIVOTEO'
       PRINT*, 'INDEX = 1, ELIMINACION GAUSSIANA CON'
       PRINT*, '   PIVOTEO MAXIMO DE COLUMNA'
       PRINT*, 'INDEX = 2, ELIMINACION GAUSSIANA CON'
       PRINT*, '   PIVOTEO ESCALADO DE COLUMNA'
       READ*, INDEX
       IF(INDEX.EQ.0) PRINT*, ' NO USARE PIVOTEO'
       IF(INDEX.EQ.1) PRINT*, ' USARE PIVOTEO MAXIMO'
       IF(INDEX.EQ.2) PRINT*, ' USARE PIVOTEO ESCALADO'
C
       CALL MATRIZA(N, AA, M)
       IF(INDEX.EQ.0) CALL GAUSELI (N, AA, M, XX)
       IF(INDEX.EQ.1) CALL GAUSMAX (N, AA, M, XX)
       IF(INDEX.EQ.2) CALL GAUSESC (N, AA, M, XX)
C
       PRINT*, ' LA APROXIMACION A LA SOLUCION ES'
       DO 10 I = 1, N
 10        PRINT*, XX(I)
       STOP
       END
   *****************************************************
       SUBROUTINE GAUSMAX (N, A, M, XX)
       PARAMETER (MM = 20)
       INTEGER I, J, K, N, IFIL(MM)
       REAL AA(M,*), XX(M), CHECK, CHECK1, MUL(MM,MM)
C
       DO 10 K = 1, N
 10       IFIL(K) = K
C
       DO 99 I = 1, N - 1
         PRINT*, '     *** PASO NUMERO ***   I : ', I
```

```
          CHECK = ABS(A(IFIL(I), I))
          IP = I
         DO 20  J = I + 1,  N
            CHECK1 = ABS(A(IFIL(J), I))
           IF(CHECK1.GT.CHECK)  THEN
             CHECK = CHECK1
             IP = J
             PRINT*, ' HAY  INTERCAMBIO  DE  I : ', I
             PRINT*, '                  CON  IP : ', IP
           ENDIF
 20      CONTINUE
           IF(A(IFIL(IP), I).EQ.0.0)  THEN
             PRINT*, ' NO  EXISTE  SOLUCION  UNICA '
             GOTO  999
           ENDIF
           IF(IFIL(I).NE.IFIL(IP))  THEN
             AUX = IFIL(I)
             IFIL(I) = IFIL(IP)
             IFIL(IP) = AUX
           ENDIF
         DO 77  J = I + 1,  N
            MUL(IFIL(J), I) = A(IFIL(J), I)/A(IFIL(I), I)
            PRINT*, ' MULTIPLICADOR '
            PRINT*,  I,  J,  MUL(IFIL(J), I)
          DO 88  K = 1,  N + 1
 88          A(IFIL(J), K) = A(IFIL(J), K) − MUL(IFIL(J), I) ∗ A(IFIL(I), K)
 77      CONTINUE
          PRINT*,  ((A(K, J) ,   J = 1,  N + 1) ,   K = 1,  N)
 99     CONTINUE
C
        IF(A(IFIL(N), N).EQ.0.0)  THEN
          PRINT*, ' NO  EXISTE  SOLUCION  UNICA '
          GOTO  999
        ENDIF
C
            XX(N) = A(IFIL(N), N + 1)/A(IFIL(N), N)
        DO 55  I = N − 1,  1,  −1
            SUMA = 0.0
          DO 44  J = I + 1,  N
 44         SUMA = SUMA + A(IFIL(I), J) ∗ XX(J)
            XX(I) = (A(IFIL(I), N + 1) − SUMA)/A(IFIL(I), I)
 55     CONTINUE
        PRINT*, ' EL  PROCEDIMIENTO  HA  SIDO '
        PRINT*, ' COMPLETADO  SATISFACTORIAMENTE '
 999    CONTINUE
        RETURN
        END
     ∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗
        SUBROUTINE  MATRIZA (N,  AA,  M)
        INTEGER  N,  I,  J,  M
        REAL  AA(M, ∗)
        OPEN (UNIT = 13, FILE =' IN.DAT')
C
```

```
          DO 10 I = 1, N
            DO 10 J = 1, N + 1
10            READ(13, *) AA(I, J)
          CLOSE(13)
          RETURN
          END
```

Vamos ahora a presentar un nuevo ejemplo, cuya solución se obtendrá de dos maneras, por supuesto, equivalentes. Primero, seguiremos el algoritmo como si fuese un ordenador el que hace los cálculos, y después resolvemos el sistema con el algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna, en la manera habitual como cuando se hacen *los cálculos a mano*. En ambos casos, los cálculos serán hechos en aritmética de cinco dígitos (los resultados obtenidos con un ordenador computando con representación numérica de precisión simple son ligeramente distintos).

Ejemplo 4.

El sistema lineal

$$\begin{array}{rrcrcrcr} E_1: & 1.5611\,x_1 & + & 5.1791\,x_2 & - & 1.6852\,x_3 & = & 8.4254\,, \\ E_2: & 3.3330\,x_1 & + & 15920\,x_2 & + & 10.333\,x_3 & = & 15913\,, \\ E_3: & 2.2220\,x_1 & + & 16.710\,x_2 & - & 9.6120\,x_3 & = & 28.544\,, \end{array}$$

tiene la solución exacta $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.0$ y $x_3 = -1.0$; resolvámoslo usando el método de eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna y aritmética de cinco dígitos.

(a) En primer lugar resolvemos el sistema lineal siguiendo los pasos del algoritmo, como si fuese un ordenador el que efectúa los cálculos.

La matriz ampliada almacenada por el ordenador será:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 & | & 8.4254 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 & | & 28.544 \end{pmatrix} .$$

Paso 1: *(Inicializar el indicador de la fila).* Para $i = 1, 2, \ldots, n$ tomar $F(i) = i$; es decir

$$F(1) = 1\,, \qquad F(2) = 2\,, \qquad F(3) = 3\,.$$

Paso 2: Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ($i = 1, 2$) seguir los pasos 3–6 *(proceso de eliminación).* Empezamos con $i = 1$.

Paso 3: Sea p el menor entero con $i \le p \le n$ y

$$|a(F(p), i)| = \max_{i \le j \le n} |a(F(j), i)|\,.$$

Es decir, buscar el menor entero $1 \le p \le 3$ tal que

$$|a(F(p), 1)| = \max_{1 \le j \le 3} |a(F(j), 1)|\,.$$

$$j = 1, \qquad |a(F(1), 1)| = |a_{11}| = 1.5611\,,$$

$j = 2, \qquad |a(F(2), 1)| = |a_{21}| = 3.3330$,

$j = 3, \qquad |a(F(3), 1)| = |a_{31}| = 2.2220$.

El valor máximo es el segundo; luego $p = 2$.

Paso 4: Si $a(F(p), i) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 5: Si $F(i) \neq F(p)$ entonces tomar $AUX = F(i)$, $F(i) = F(p)$, $F(p) = AUX$; *(intercambio de filas simulado).* En nuestro caso,

$$F(1) = 2 \ , \qquad F(2) = 1 \ , \qquad F(3) = 3 \ .$$

Paso 6: Para $j = i + 1, i + 2, \ldots, n$ $(j = 2, 3)$ seguir los pasos 7 y 8.

Paso 7: Tomar $m(F(j), i) = \frac{a(F(j),i)}{a(F(i),i)}$.

$j = 2, i = 1,$

$m(F(2), 1) = m(1, 1) = \frac{a(F(2),1)}{a(F(1),1)} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{1.5611}{3.3330} = 0.46838$,

$j = 3, i = 1,$

$m(F(3), 1) = m(3, 1) = \frac{a(F(3),1)}{a(F(1),1)} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = \frac{2.2220}{3.3330} = 0.66667$,

Paso 8: Efectuar $(E_{F(j)} - m(F(j), i)\ E_{F(i)}) \to (E_{F(j)})$.

$j = 2, i = 1, \qquad (E_{F(2)} - m(F(2), 1)\ E_{F(1)}) \to (E_{F(2)})$,

$\qquad (E_1 - m(1, 1)\ E_2) \to (E_1)$,

$j = 3, i = 1, \qquad (E_{F(3)} - m(F(3), 1)\ E_{F(1)}) \to (E_{F(3)})$,

$\qquad (E_3 - m(3, 1)\ E_2) \to (E_3)$,

entonces la matriz ampliada se transforma en:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 5.1791 - 7456.6 & -1.6852 - 4.8398 & | & 8.4254 - 7453.3 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & 16.710 - 10613 & -9.6120 - 6.8887 & | & 28.544 - 10609 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0000 & -7451.4 & -6.525 & | & -7444.9 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & | & -10580 \end{pmatrix} .$$

Paso 2: Continuamos con $i = 2$.

Paso 3: Sea p el menor entero con $i \leq p \leq n$ y

$$|a(F(p), i)| = \max_{i \leq j \leq n} |a(F(j), i)| \ .$$

Es decir, buscar el menor entero $2 \leq p \leq 3$ tal que

$$|a(F(p), 2)| = \max_{2 \leq j \leq 3} |a(F(j), 2)| \ .$$

$j = 2, \qquad |a(F(2), 2)| = |a_{12}| = 7451.4$,

$j = 3, \qquad |a(F(3), 2)| = |a_{32}| = 10596$.

El valor máximo es el segundo; luego $p = 3$.

Paso 4: Si $a(F(p), i) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 5: Si $F(i) \neq F(p)$ entonces tomar $AUX = F(i)$, $F(i) = F(p)$, $F(p) = AUX$; *(intercambio de filas simulado).* En nuestro caso,

$$F(1) = 2 \ , \qquad F(2) = 3 \ , \qquad F(3) = 1 \ .$$

Paso 6: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ $(j = 3)$ seguir los pasos 7 y 8.

Paso 7: Tomar $m(F(j), i) = \frac{a(F(j),i)}{a(F(i),i)}$.

$j = 3, i = 2,$

$$m(F(3), 2) = m(1, 2) = \frac{a(F(3),2)}{a(F(2),2)} = \frac{a_{12}}{a_{32}} = \frac{-7451.4}{-10596} = 0.70323 \ ,$$

Paso 8: Efectuar $(E_{F(j)} - m(F(j), i) \ E_{F(i)}) \to (E_{F(j)})$.

$j = 3, i = 2,$ $\quad (E_{F(3)} - m(F(3), 2) \ E_{F(2)}) \to (E_{F(3)})$,

$(E_1 - m(1, 2) \ E_3) \to (E_1)$,

entonces la matriz ampliada se transforma en:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -6.525 + 11.604 & | & -7444.9 + 7440.2 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & | & -10580 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 5.0790 & | & -4.7000 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & | & -10580 \end{pmatrix} .$$

Paso 9: Si $a(F(n), n) = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 10: *(Empieza la sustitución hacia atrás)*; tomar

$$x_n = \frac{a(F(n), n+1)}{a(F(n), n)} .$$

Entonces,

$$x_3 = \frac{a(F(3), 4)}{a(F(3), 3)} = \frac{a_{14}}{a_{13}} = \frac{-4.7000}{5.0790} = -0.92538 .$$

Paso 11: Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ $(i = 2, 1)$ tomar

$$x_i = \frac{a(F(i), n+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(F(i), j) \ x_j}{a(F(i), i)} .$$

Entonces,

$$x_2 = \frac{a(F(2), 4) - a(F(2), 3) \ x_3}{a(F(2), 2)} = \frac{a_{34} - a_{33} \ x_3}{a_{32}} =$$

$$= \frac{-10580 - (-16.501)(-0.92538)}{-10596} =$$

$$= \frac{-10580 - 15.270}{-10596} = \frac{-10595}{-10596} = 0.99991 \ ,$$

$$x_1 = \frac{a(F(1), 4) - \sum_{j=2}^{3} a(F(1), j) \ x_j}{a(F(i), i)} =$$

$$= \frac{a(F(1), 4) - a(F(1), 2) \ x_2 - a(F(1), 3) \ x_3}{a(F(1), 1)} =$$

$$= \frac{a_{24} - a_{22} \ x_2 - a_{23} \ x_3}{a_{21}} =$$

$$= \frac{15913 - (15920)(0.99991) - (10.333)(-0.92538)}{3.3330} =$$

$$= \frac{15913 - 15919 + 9.5620}{3.3330} = \frac{3.5620}{3.3330} = 1.0687 .$$

Paso 12: SALIDA $(x_1 = 1.0687, x_2 = 0.99991, x_3 = -0.92538)$;
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR.

(b) Ahora resolvemos el sistema lineal de la manera más normal mediante el cómputo manual.

La matriz ampliada será:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 & | & 8.4254 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 & | & 28.544 \end{pmatrix} .$$

En primer lugar, tenemos que buscar el menor entero $1 \leq p \leq 3$ tal que

$$|a_{p1}| = \max_{1 \leq j \leq 3} |a_{j1}| .$$

$j = 1, \qquad |a_{11}| = 1.5611$,
$j = 2, \qquad |a_{21}| = 3.3330$,
$j = 3, \qquad |a_{31}| = 2.2220$.
El valor máximo es el segundo, entonces, $p = 2$, y tenemos que intercambiar la fila (E_1) con (E_2). La nueva matriz ampliada es

$$A_a = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 & | & 8.4254 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 & | & 28.544 \end{pmatrix} .$$

Para $j = 2, 3$ tomar $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$.
$j = 2, i = 1, \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1.5611}{3.3330} = 0.46838$,
$j = 3, i = 1, \qquad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2.2220}{3.3330} = 0.66667$;
y efectuar $(E_j - m_{ji}\ E_i) \rightarrow (E_j)$.
$j = 2, i = 1, \qquad (E_2 - m_{21}\ E_1) \rightarrow (E_2)$,
$j = 3, i = 1, \qquad (E_3 - m_{31}\ E_1) \rightarrow (E_3)$,
entonces la matriz ampliada se transforma en:

$$A_a = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & 5.1791 - 7456.6 & -1.6852 - 4.8398 & | & 8.4254 - 7453.3 \\ 0.0000 & 16.710 - 10613 & -9.6120 - 6.8887 & | & 28.544 - 10609 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & | & 15913 \\ 0.0000 & -7451.4 & -6.525 & | & -7444.9 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & | & -10580 \end{pmatrix} .$$

Ahora tenemos que buscar el menor entero $2 \leq p \leq 3$ tal que

$$|a_{p2}| = \max_{2 \leq j \leq 3} |a_{j2}| .$$

$j = 2, \qquad |a_{22}| = 7451.4$,
$j = 3, \qquad |a_{32}| = 10596$.

El valor máximo es el segundo, entonces, $p = 3$, y tenemos que intercambiar la fila (E_2) con (E_3). La nueva matriz ampliada es

$$A_a = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & \vert & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & \vert & -10580 \\ 0.0000 & -7451.4 & -6.525 & \vert & -7444.9 \end{pmatrix} .$$

Tomar $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$.
$j = 3, i = 2, \qquad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-7451.4}{-10596} = 0.70323$,
y efectuar $(E_j - m_{ji}\ E_i) \to (E_j)$.
$j = 3, i = 2, \qquad (E_3 - m_{32}\ E_2) \to (E_3)$,
entonces la matriz ampliada se transforma en:

$$A_a = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & \vert & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & \vert & -10580 \\ 0.0000 & 0.0000 & -6.525 + 11.604 & \vert & -7444.9 + 7440.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 & \vert & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & -16.501 & \vert & -10580 \\ 0.0000 & 0.0000 & 5.0790 & \vert & -4.7000 \end{pmatrix} .$$

Finalmente,

$$x_3 = \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{-4.7000}{5.0790} = -0.92538 ,$$

$$x_2 = \frac{a_{24} - a_{23}\ x_3}{a_{22}} = \frac{-10580 - (-16.501)(-0.92538)}{-10596} =$$

$$= \frac{-10580 - 15.270}{-10596} = \frac{-10595}{-10596} = 0.99991 ,$$

$$x_1 = \frac{a_{14} - a_{12}\ x_2 - a_{13}\ x_3}{a_{11}} =$$

$$= \frac{15913 - (15920)(0.99991) - (10.333)(-0.92538)}{3.3330} =$$

$$= \frac{15913 - 15919 + 9.5620}{3.3330} = \frac{3.5620}{3.3330} = 1.0687 .$$

4. EL ALGORITMO DE GAUSS-JORDAN

Como hemos visto en el método conocido como regla de Cramer (ver Capítulo XIII), para resolver el sistema lineal $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede necesitar la matriz inversa A^{-1} para obtener $\mathbf{x} = A^{-1}\ \mathbf{b}$ como única solución del sistema. Sin embargo la inversa A^{-1} de una matriz $n \times n$ no singular A no se necesita a menudo, dado que existen otros métodos para resolver los sistemas lineales. De cualquier manera, el **algoritmo de Gauss-Jordan** nos da un método para invertir la aplicación $\mathbf{x} \longrightarrow A\ \mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, de una manera sistemática.

Consideremos el sistema $A\ \mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = y_1 \ , \\ E_2 :&\quad a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = y_2 \ , \\ &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ E_n :&\quad a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = y_n \ . \end{aligned} \qquad (XV.1)$$

En el primer paso del método de Gauss-Jordan, la variable x_1 se cambia por una de las variables y_r. Para hacer esto, se busca un coeficiente $a_{r1} \neq 0$, por ejemplo con el pivoteo máximo de columna:

$$|a_{r1}| = \max_{1\leq i\leq n} |a_{i1}|$$

y las ecuaciones E_1 y E_r vienen intercambiadas, es decir, se hace un intercambio de filas $(E_1) \leftrightarrow (E_r)$. De esta manera se obtiene un sistema:

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad \overline{a}_{11}\ x_1 + \overline{a}_{12}\ x_2 + \ldots + \overline{a}_{1n}\ x_n = \overline{y}_1\ , \\ E_2 :&\quad \overline{a}_{21}\ x_1 + \overline{a}_{22}\ x_2 + \ldots + \overline{a}_{2n}\ x_n = \overline{y}_2\ , \\ &\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ E_n :&\quad \overline{a}_{n1}\ x_1 + \overline{a}_{n2}\ x_2 + \ldots + \overline{a}_{nn}\ x_n = \overline{y}_n\ , \end{aligned} \tag{XV.2}$$

en el cual las variables $\overline{y}_1$, ..., $\overline{y}_n$ son permutaciones de y_1, ..., y_n, y además $\overline{a}_{11} = a_{r1}$, $\overline{y}_1 = y_r$. Ahora $\overline{a}_{11} \neq 0$, porque si no fuese así,tendríamos $a_{i1} = 0$ para todo i, con lo que A sería singular. Resolvamos la primera ecuación de $(XV.2)$ para x_1, y sustituyamos el resultado en todas las demás ecuaciones del sistema. Entonces se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad a'_{11}\ \overline{y}_1 + a'_{12}\ x_2 + \ldots + a'_{1n}\ x_n = x_1\ , \\ E_2 :&\quad a'_{21}\ \overline{y}_1 + a'_{22}\ x_2 + \ldots + a'_{2n}\ x_n = \overline{y}_2\ , \\ &\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ E_n :&\quad a'_{n1}\ \overline{y}_1 + a'_{n2}\ x_2 + \ldots + a'_{nn}\ x_n = \overline{y}_n\ , \end{aligned} \tag{XV.3}$$

donde, para todo $i, k = 2, 3, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{1}{\overline{a}_{11}}, &\qquad a'_{1k} &= -\frac{\overline{a}_{1k}}{\overline{a}_{11}}, \\ a'_{i1} &= \frac{\overline{a}_{i1}}{\overline{a}_{11}}, &\qquad a'_{ik} &= \overline{a}_{ik} - \overline{a}_{i1}\ \frac{\overline{a}_{1k}}{\overline{a}_{11}}. \end{aligned}$$

En el paso siguiente, la variable x_2 se cambia con una de las variables $\overline{y}_2$, ..., $\overline{y}_n$; es decir, se busca $a_{r2} \neq 0$, tal que $|a_{r2}| = \max\limits_{2\leq i\leq n} |a_{i2}|$ y se hace un intercambio de filas $(E_2) \leftrightarrow (E_r)$; luego se resuelve la segunda ecuación para x_2, y se sustituye en todas las demás ecuaciones del sistema. Después se repite para las variables x_3 y para todas las demás. Si representamos los sistemas con sus matrices, partiendo de $A = A^{(0)}$, se obtiene una sucesión $A^{(0)} \rightarrow A^{(1)} \rightarrow \ldots \rightarrow A^{(n)}$. La matriz genérica $A^{(j)} = a_{ik}^{(j)}$ representa el *sistema mixto de ecuaciones* de la forma

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad a_{11}^{(j)}\ \tilde{y}_1 + \ldots + a_{1j}^{(j)}\ \tilde{y}_j + a_{1,j+1}^{(j)}\ x_{j+1} + \ldots + a_{1n}^{(j)}\ x_n = x_1\ , \\ &\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ E_j :&\quad a_{21}^{(j)}\ \tilde{y}_1 + \ldots + a_{jj}^{(j)}\ \tilde{y}_j + a_{j,j+1}^{(j)}\ x_{j+1} + \ldots + a_{jn}^{(j)}\ x_n = x_j\ , \\ E_{j+1} :&\quad a_{21}^{(j)}\ \tilde{y}_1 + \ldots + a_{j+1,j}^{(j)}\ \tilde{y}_j + a_{j+1,j+1}^{(j)}\ x_{j+1} + \ldots + a_{2n}^{(j)}\ x_n = \tilde{y}_{j+1}\ , \\ &\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ E_n :&\quad a_{n1}^{(j)}\ \tilde{y}_1 + \ldots + a_{nj}^{(j)}\ \tilde{y}_j + a_{n,j+1}^{(j)}\ x_{j+1} + \ldots + a_{nn}^{(j)}\ x_n = \tilde{y}_n\ . \end{aligned} \tag{XV.4}$$

En este sistema ($\tilde{y}_1$, ..., $\tilde{y}_n$) indica una permutación de las variables originarias (y_1, ..., y_n). En el paso $A^{(j-1)} \to A^{(j)}$ la variable x_j se intercambia por $\tilde{y}_j$. Entonces, se obtiene $A^{(j)}$ de $A^{(j-1)}$ según las reglas dadas abajo. Por simplicidad, los elementos de $A^{(j-1)}$ se indican con a_{ik}, y los elementos de $A^{(j)}$ con a'_{ik}.

Reglas para el algoritmo de Gauss-Jordan con pivoteo máximo de columna.

a) Determinar r como el menor entero $j \le r \le n$ tal que

$$|a_{rj}| = \max_{j \le i \le n} |a_{ij}| .$$

Si $a_{rj} = 0$, la matriz es singular y no hay solución.

b) Intercambiar las filas r y j de la matriz $A^{(j-1)}$ y llamar al resultado $\overline{A} = \overline{a}_{ik}$.

c) Calcular $A^{(j)} = a'_{ik}$, para $i, k \neq j$, según las fórmulas

$$a'_{jj} = \frac{1}{\overline{a}_{jj}}, \qquad a'_{jk} = -\frac{\overline{a}_{jk}}{\overline{a}_{jj}},$$

$$a'_{ij} = \frac{\overline{a}_{ij}}{\overline{a}_{jj}}, \qquad a'_{ik} = \overline{a}_{ik} - \overline{a}_{ij}\,\frac{\overline{a}_{jk}}{\overline{a}_{jj}}.$$

El sistema $(XV.4)$ implica que

$$A^{(n)}\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{x}\ , \qquad \hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)^t$$

donde $(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ es una permutación de las variables originales $(y_1, \ldots, y_n)$; es decir, $\hat{\mathbf{y}} = P\ \mathbf{y}$ que corresponde a los intercambios de filas hechos en el paso b) del algoritmo de Gauss-Jordan, y puede ser fácilmente determinado. Entonces, $A^{(n)}\ \hat{\mathbf{y}} = A^{(n)}\ P\ \mathbf{y} = \mathbf{x}$ además de $A\ \mathbf{x} = \mathbf{y}$, lo que implica

$$A^{-1} = A^{(n)}\ P\ .$$

Ejemplo 5.

Encontrar la matriz inversa A^{-1} de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\ .$$

Para hallar la matriz inversa, aplicamos el método de Gauss-Jordan sin ningún pivoteo (sin intercambios de filas). Entonces la matriz $A^{(0)}$ es la misma matriz A:

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\ .$$

Dado que no hay pivoteo, la matriz $\overline{A}$ es la misma matriz $A^{(0)}$; entonces construímos la matriz $A^{(1)}$ de la siguiente manera:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\overline{a}_{11}} & -\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & -\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \\ \dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{22} - \overline{a}_{21}\,\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{23} - \overline{a}_{21}\,\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \\ \dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{32} - \overline{a}_{31}\,\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{33} - \overline{a}_{31}\,\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Como antes, dado que no hay pivoteo, la matriz $\overline{A}$ es la misma matriz $A^{(1)}$; entonces construímos la matriz $A^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} - \overline{a}_{12}\,\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{22}} & \overline{a}_{13} - \overline{a}_{12}\,\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \\ -\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{1}{\overline{a}_{22}} & -\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \\ \overline{a}_{31} - \overline{a}_{32}\,\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}} & \overline{a}_{33} - \overline{a}_{32}\,\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

De nuevo, la matriz $\overline{A}$ es la misma matriz $A^{(2)}$; entonces construímos la matriz $A^{(3)}$ de la siguiente manera:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} - \overline{a}_{13}\,\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & \overline{a}_{12} - \overline{a}_{13}\,\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{33}} \\ \overline{a}_{21} - \overline{a}_{23}\,\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & \overline{a}_{22} - \overline{a}_{23}\,\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{33}} \\ -\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & -\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{1}{\overline{a}_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} .$$

Ejemplo 6.

Volvemos al ejemplo 4 y resolvemos el sistema lineal

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1 : & 1.5611\,x_1 & + & 5.1791\,x_2 & - & 1.6852\,x_3 & = & 8.4254 , \\ E_2 : & 3.3330\,x_1 & + & 15920\,x_2 & + & 10.333\,x_3 & = & 15913 , \\ E_3 : & 2.2220\,x_1 & + & 16.710\,x_2 & - & 9.6120\,x_3 & = & 28.544 , \end{array}$$

con el método de Gauss-Jordan con pivoteo máximo de columna y aritmética de cinco dígitos.

La primera matriz $A^{(0)}$ será:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 \end{pmatrix} ;$$

para determinar la matriz $\overline{A}$, tenemos que buscar el menor entero $1 \leq p \leq 3$ tal que

$$|a_{p1}| = \max_{1\leq i\leq 3} |a_{i1}| ,$$

que en este caso es $p = 2$, y tenemos que intercambiar la fila (E_1) con (E_2). Entonces

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 \\ 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{y}} = (15913, 8.4254, 28.544)^t .$$

Ahora calculamos la matriz $A^{(1)} = (a'_{ik})$ según:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\overline{a}_{11}} & -\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & -\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \\ \dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{22} - \overline{a}_{21}\,\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{23} - \overline{a}_{21}\,\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \\ \dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{32} - \overline{a}_{31}\,\dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} & \overline{a}_{33} - \overline{a}_{31}\,\dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.30003 & -4776.5 & -3.1002 \\ 0.46838 & -7451.4 & -6.5250 \\ 0.66667 & -10596 & -16.501 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ahora tenemos que buscar el menor entero $2 \le p \le 3$ tal que

$$|a_{p2}| = \max_{2\le i\le 3} |a_{i2}| \; ;$$

y en nuestro caso $p = 3$, y tenemos que intercambiar la fila (E_2) con (E_3). Entonces

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0.30003 & -4776.5 & -3.1002 \\ 0.66667 & -10596 & -16.501 \\ 0.46838 & -7451.4 & -6.5250 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{y}} = (15913, 28.544, 8.4254)^t \; .$$

Ahora calculamos la matriz $A^{(2)} = (a'_{ik})$ según:

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} - \overline{a}_{12}\,\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{22}} & \overline{a}_{13} - \overline{a}_{12}\,\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \\ -\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{1}{\overline{a}_{22}} & -\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \\ \overline{a}_{31} - \overline{a}_{32}\,\dfrac{\overline{a}_{21}}{\overline{a}_{22}} & \dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}} & \overline{a}_{33} - \overline{a}_{32}\,\dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{22}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.49 * 10^{-3} & 0.45078 & 4.3382 \\ 0.62917 * 10^{-4} & -0.94375 * 10^{-4} & -0.15573 * 10^{-2} \\ -0.44 * 10^{-3} & 0.70323 & 5.0790 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Ahora la matriz $\overline{A}$ es la misma matriz $A^{(2)}$; entonces construímos la matriz $A^{(3)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A^{(3)} &= \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} - \overline{a}_{13}\,\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & \overline{a}_{12} - \overline{a}_{13}\,\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{33}} \\ \overline{a}_{21} - \overline{a}_{23}\,\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & \overline{a}_{22} - \overline{a}_{23}\,\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{33}} \\ -\dfrac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{33}} & -\dfrac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{33}} & \dfrac{1}{\overline{a}_{33}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.11438 * 10^{-3} & -0.14954 & 0.85414 \\ 0.62895 * 10^{-4} & -0.58724 * 10^{-4} & -0.30667 * 10^{-4} \\ 0.86631 * 10^{-4} & -0.13846 & 0.19689 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Así tenemos la solución $\mathbf{x} = A^{(3)}\hat{\mathbf{y}}$, con $\hat{\mathbf{y}} = (15913, 28.544, 8.4254)$; es decir

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.11438 * 10^{-3} * 15913 - 0.14954 * 28.544 + 0.85414 * 8.4254 = \\ &= -1.8201 - 4.2685 + 7.1965 = 1.1079 \; , \\ x_2 &= 0.62895 * 10^{-4} * 15913 - 0.58724 * 10^{-4} * 28.544 - 0.30667 * 10^{-4} * 8.4254 = \\ &= 1.0008 - 0.16762 * 10^{-2} - 0.25838 * 10^{-3} = 0.99886 \; , \\ x_3 &= 0.86631 * 10^{-4} * 15913 - 0.13846 * 28.544 + 0.19689 * 8.4254 = \\ &= 1.3786 - 3.9522 + 1.6589 = -0.91470 \; . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{x} = (1.1079, 0.99886, -0.91470)$$

es la solución aproximada de la solución exacta $(1.0, 1.0, -1.0)$ obtenida con el método de Gauss-Jordan.

En la práctica, cuando se hacen los cálculos para resolver *a mano* un sistema de ecuaciones lineal, no se construyen las matrices $A^{(k)}$, si no que se trabaja directamente sobre el sistema. Mostraremos esta manera de proceder en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.

Reconsideremos el ejemplo 3 del Capítulo XIII y resolvemos el sistema lineal

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1: & x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 2\,, \\ E_2: & 2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 3\,, \\ E_3: & -\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4\,, \end{array}$$

con el método de Gauss-Jordan con pivoteo escalado de columna y aritmética de tres dígitos.

En el Capítulo XIII hemos visto que la solución de este sistema es

$$x_1 = \frac{7}{9}\,, \qquad x_2 = \frac{13}{9}\,, \qquad x_3 = \frac{15}{9}\,.$$

En el primer paso del método de Gauss-Jordan, la variable x_1 se cambia por una de las variables y_r. Para hacer esto, se busca un coeficiente $a_{r1} \neq 0$, con el pivoteo escalado de columna:

$$s_i = \max_{1 \leq j \leq 3} |a_{ij}|\,, \qquad \frac{|a_{r1}|}{s_r} = \max_{1 \leq i \leq 3} \frac{|a_{i1}|}{s_i}\,,$$

y las ecuaciones E_1 y E_r vienen intercambiadas, $(E_1) \leftrightarrow (E_r)$. En nuestro caso

$$s_1 = s_2 = s_3 = 2\,,$$

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{1.0}{2.0} = 0.5\,, \qquad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{2.0}{2.0} = 1.0\,, \qquad \frac{|a_{31}|}{s_3} = \frac{1.0}{2.0} = 0.5\,,$$

y así tenemos que intercambiar las primera y la segunda ecuación, y también tenemos que intercambiar los factores de escala, aunque en este caso quedan iguales $s_1 = s_2 = s_3 = 2$. De esta manera se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 3\,, \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 2\,, \\ -\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4\,. \end{array}$$

Ahora, resolvemos la primera ecuación por x_1, y sustituyemos el resultado en todas las demás ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1.5 & - & 0.5\,x_2 & & & & & = & x_1\,, \\ (1.5 & - & 0.5\,x_2) & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 2\,, \\ (-1.5 & + & 0.5\,x_2) & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4\,. \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1.5 & - & 0.5\,x_2 & & & = & x_1\,, \\ 1.5 & + & 1.5\,x_2 & - & x_3 & = & 2\,, \\ -1.5 & + & 1.5\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4\,. \end{array}$$

Ahora aplicamos otra vez el pivoteo escalado de columna:

$$\frac{|a_{22}|}{s_2} = \frac{1.5}{2.0} = 0.75 \ , \qquad \frac{|a_{32}|}{s_3} = \frac{1.5}{2.0} = 0.75 \ ,$$

y así no hay que intercambiar ecuaciones. Entonces, podemos resolver la segunda ecuación por x_2, y sustituir el resultado en las demás:

$$\begin{array}{rclcrcl} 1.5 & - & 0.5\,(0.333 + 0.667\ x_3) & & & = & x_1 \ , \\ 0.333 & & & + & 0.667\ x_3 & = & x_2 \ , \\ -1.5 & + & 1.5\,(0.333 + 0.667\ x_3) & + & 2\ x_3 & = & 4 \ , \end{array}$$

que nos da

$$\begin{array}{rcrcl} 1.33 & - & 0.334\ x_3 & = & x_1 \ , \\ 0.333 & + & 0.667\ x_3 & = & x_2 \ , \\ -1.00 & + & 3\ x_3 & = & 4 \ . \end{array}$$

Finalmente, resolvemos la tercera ecuación por la variable x_3, y sustituyamos el resultado en las demás,

$$\begin{array}{rcrcl} 3\ x_3 & = & 5 \ , & \Rightarrow & x_3 = \frac{5}{3} = 1.67 \\ 1.33 & - & 0.334\ (1.67) & = & x_1 \ , \\ 0.333 & + & 0.667\ (1.67) & = & x_2 \ , \end{array}$$

para obtener la solución

$$x_1 = 0.772 \ , \qquad x_2 = 1.44 \ , \qquad x_3 = 1.67 \ ,$$

que es una buena aproximación de la solución exacta

$$x_1 = \frac{7}{9} \ , \qquad x_2 = \frac{13}{9} \ , \qquad x_3 = \frac{15}{9} \ .$$

EJERCICIOS.

1. Resolver los siguientes sistemas lineales con aritmética de redondeo de dos dígitos y i) eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, ii) eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna, iii) eliminación Gaussiana con pivoteo escalado de columna, iv) el algoritmo de Gauss-Jordan. Luego resolverlos con aritmética exacta y determinar cuál de i), ii), iii) o iv) es el más exacto.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 1\,, \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 &= -1\,, \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 &= 11\,, \\ x_1 + x_2 - 3\,x_3 &= -5\,, \\ 4\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 &= -9\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.4\,x_3 &= 1.1\,, \\ 4\,x_1 + x_2 - x_3 &= 6\,, \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 0.04\,x_1 + 0.01\,x_2 - 0.01\,x_3 &= 0.06\,, \\ 0.2\,x_1 + 0.5\,x_2 - 0.2\,x_3 &= 0.3\,, \\ x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 &= 11\,. \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 + x_3 &= -1\,, \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 9\,x_3 &= 0\,, \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

2. Resolver los siguientes sistemas lineales con aritmética de redondeo de tres dígitos y i) eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, ii) eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna, iii) eliminación Gaussiana con pivoteo escalado de columna, iv) el algoritmo de Gauss-Jordan. Luego resolverlos con aritmética exacta y determinar cuál de i), ii), iii) o iv) es el más exacto.

a)
$$\begin{aligned} 0.832\,x_1 + 0.448\,x_2 + 0.193\,x_3 &= 1.00\,, \\ 0.784\,x_1 + 0.421\,x_2 - 0.207\,x_3 &= 0.00\,, \\ 0.784\,x_1 - 0.421\,x_2 + 0.279\,x_3 &= 0.00\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0.03\,x_1 + 58.9\,x_2 &= 59.2\,, \\ 5.31\,x_1 - 6.10\,x_2 &= 47.0\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 58.9\,x_1 + 0.03\,x_2 &= 59.2\,, \\ -6.10\,x_1 + 5.31\,x_2 &= 47.0\,. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \pi\,x_1 - e\,x_2 + \sqrt{2}\,x_3 - \sqrt{3}\,x_4 &= 1\,, \\ \pi^2\,x_1 + e\,x_2 - e^2\,x_3 + \tfrac{3}{7}\,x_4 &= -1\,, \\ \sqrt{5}\,x_1 - \sqrt{6}\,x_2 + x_3 - 1.1\,x_4 &= 0\,, \\ \pi^3\,x_1 + e^2\,x_2 - \sqrt{7}\,x_3 + x_4 &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

3. Resolver los siguientes sistemas lineales con aritmética de redondeo de cuatro dígitos y i) eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, ii) eliminación Gaussiana con pivoteo máximo de columna, iii) eliminación Gaussiana con pivoteo escalado de columna, iv) el algoritmo de Gauss-Jordan. Luego resolverlos con aritmética exacta y determinar cuál de i), ii), iii) o iv) es el más exacto.

$$a)\qquad \begin{aligned} 58.09\, x_1 &+ 1.003\, x_2 = 68.12 \,, \\ 321.8\, x_1 &+ 5.550\, x_2 = 377.3 \,. \end{aligned}$$

$$b)\qquad \begin{aligned} 1.003\, x_1 &+ 58.09\, x_2 = 68.12 \,, \\ 321.8\, x_1 &+ 5.550\, x_2 = 377.3 \,. \end{aligned}$$

4. Dadas las siguientes matrices A y vectores $\mathbf{b}$, determinar si los sistemas de ecuaciones lineales $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen solución.

$$a)\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \;;$$

$$b)\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;$$

$$c)\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \;;$$

$$d)\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;.$$