CAPITULO XII. CEROS DE POLINOMIOS

1. EL METODO DE HORNER

Una función de la forma

$$P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ , \qquad (XII.1)$$

donde las a_i, llamadas los **coeficientes** de P, son constantes y $a_0 \neq 0$, se llama un **polinomio de grado** N. La función cero, $P(x) = 0$ para todos los valores de x, se considera un polinomio pero no se le asigna ningun grado.

Teorema XII.1 (Teorema Fundamental del Algebra)

Si P es un polinomio de grado $N \geq 1$, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

Corolario XII.2

Si $P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N$ es un polinomio de grado $N \geq 1$, entonces existen constantes únicas x_1, x_2, ..., x_k, posiblemente complejas, y enteros positivos, m_1, m_2, ..., m_k tales que $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = N$ y

$$P(x) = a_0\ (x - x_1)^{m_1}\ (x - x_2)^{m_2}\ \ldots\ (x - x_k)^{m_k}\ . \qquad (XII.2)$$

El Corolario XII.2 afirma que los ceros de un polinomio son únicos y que si cada cero x_i es contado tantas veces como su multiplicidad m_i, entonces un polinomio de grado N tiene exactamente N ceros.

Corolario XII.3

Sean P y Q polinomios a lo sumo de grado N. Si x_1, x_2, ..., x_k, $k > N$, son números distintos con $P(x_i) = Q(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $P(x) = Q(x)$ para todo valor de x.

Para usar el procedimiento de Newton-Raphson en localizar aproximadamente los ceros de un polinomio P, es necesario evaluar a P y a su derivada en valores específicos. Como P y sus derivadas son polinomios, la eficiencia computacional requerirá que la evalución de estas funciones sea hecha de manera anidada. El método de Horner descrito en el siguiente Teorema incorpora esta técnica y como consecuencia requiere solamente de N multiplicaciones y N sumas para evaluar un polinomio de enésimo grado arbitrario.

Teorema XII.4 (Método de Horner)

Sea

$$P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ .$$

Si

$$d_0 = a_0 \qquad \text{y} \qquad d_k = a_k + d_{k-1}\ x_0\ , \qquad (XII.3)$$

para $k = 1, 2, \ldots, N-1, N$, entonces

$$d_N = P(x_0)\ . \qquad (XII.4)$$

Además, si

$$Q(x) = d_0\ x^{N-1} + d_1\ x^{N-2} + \ldots + d_{N-2}\ x + d_{N-1}\ , \qquad (XII.5)$$

entonces

$$P(x) = (x - x_0)\ Q(x) + d_N\ . \qquad (XII.6)$$

Demostración: la primera parte de la demostración es obvia, debido a la definición de los coeficientes d_k (basta sólo escribir el polinomio en forma *annidada*).

Veamos ahora la segunda parte. Por la definición de $Q(x)$:

$$\begin{aligned}(x - x_0)\ Q(x) + d_N &= (x - x_0)\ (d_0\ x^{N-1} + d_1\ x^{N-2} + \ldots + d_{N-2}\ x + d_{N-1}) + d_N = \\ &= (d_0\ x^N + d_1\ x^{N-1} + \ldots + d_{N-2}\ x^2 + d_{N-1}\ x) + \\ &\quad - (d_0\ x_0\ x^{N-1} + d_1\ x_0\ x^{N-2} + \ldots + d_{N-2}\ x_0\ x + d_{N-1}\ x_0) + \\ &\quad + d_N = \\ &= d_0\ x^N + (d_1 - d_0\ x_0)\ x^{N-1} + \ldots + (d_{N-2} - d_{N-3}\ x_0)\ x^2 + \\ &\quad (d_{N-1} - d_{N-2}\ x_0)\ x + (d_N - d_{N-1}\ x_0)\ .\end{aligned}$$

Ahora, por las hipótesis $d_0 = a_0$ y $d_k - d_{k-1}\ x_0 = a_k$, así que

$$(x - x_0)\ Q(x) + d_N = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N = P(x) \quad \text{y} \quad d_N = P(x_0)\ .$$

c.q.d.

Ejemplo 1.

Evaluar $P(x) = 2\ x^4 - 3\ x^2 + 3\ x - 4$ en $x_0 = -2$ usando el método de Horner.

Usando el Teorema XII.4

$$d_0 = 2, \qquad d_1 = 2(-2) + 0 = -4,$$

$$d_2 = (-4)(-2) - 3 = 5, \qquad d_3 = 5(-2) + 3 = -7,$$

y finalmente

$$P(-2) = d_4 = (-7)(-2) - 4 = 10\ .$$

Además, el Teorema XII.4 nos dice que

$$P(x) = (x + 2)(2\ x^3 - 4\ x^2 + 5\ x - 7) + 10\ .$$

Cuando en el método de Horner se hacen los cálculos a mano, se construye primero una tabla, que sugiere el nombre de **división sintética** con frecuencia aplicado a esta técnica. Para el problema del ejemplo anterior, la tabla aparecería como:

	Coef. de x^4	Coef. de x^3	Coef. de x^2	Coef. de x	Término constante
	$a_0 = 2$	$a_1 = 0$	$a_2 = -3$	$a_3 = 3$	$a_4 = -4$
$x_0 = -2$		$d_0x_0 = -4$	$d_1x_0 = 8$	$d_2x_0 = -10$	$d_3x_0 = 14$
	$d_0 = 2$	$d_1 = -4$	$d_2 = 5$	$d_3 = -7$	$d_4 = 10$

Una ventaja adicional al usar el procedimiento de Horner es que, como

$$P(x) = (x - x_0)\ Q(x) + d_N\ ,$$

donde

$$Q(x) = d_0\ x^{N-1} + d_1\ x^{N-2} + \ldots + d_{N-2}\ x + d_{N-1}\ ,$$

diferenciando con respecto a x da

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0)\ Q'(x)$$

y

$$P'(x_0) = Q(x_0)\ . \qquad (XII.7)$$

Así, cuando se use el método de Newton-Raphson para encontrar un cero aproximado de un polinomio P, ambos P y P' pueden ser evaluados de esta manera. El algoritmo siguiente calcula $P(x_0)$ y $P'(x_0)$ usando el método de Horner.

Algoritmo de Horner.

==

Para evaluar el polinomio

$$P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ ,$$

y su derivada en x_0:

Entrada: grado N; coeficientes a_0, a_1, …, a_N; punto donde evaluar el polinomio x_0;

Salida: $y = P(x_0)$ y $z = P'(x_0)$.

Paso 1: tomar
$y = a_0$; (*calcular* d_0 *para* P);
$z = a_0$; (*calcular* $\tilde{d}_0$ *para* Q);

Paso 2: para $j = 1, 2, \ldots, N-1$ tomar
$y = x_0\ y + a_j$; (*calcular* d_j *para* P);
$z = x_0\ z + y$; (*calcular* $\tilde{d}_j$ *para* Q);

Paso 3: tomar:
$y = x_0\ y + a_N$; (*calcular* d_N *para* P);

Paso 4: SALIDA (y, z); PARAR.

==

Un uso interesante del algoritmo de Horner es expresar el desarrollo de Taylor de un polinomio alrededor de cualquier punto. Sea el polinomio P dado por $(XII.1)$, y suponemos que buscamos los coeficientes c_k de la ecuación

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ , \\ &= c_0\ (x - x_0)^N + c_1\ (x - x_0)^{N-1} + \ldots + c_{N-1}\ (x - x_0) + c_N\ . \end{aligned}$$

Es obvio por el teorema de Taylor de que $c_k = \dfrac{1}{(N-k)!}\ P^{(N-k)}(x_0)$, para $k = 0, 1, \ldots, N$, pero es nuestra intención buscar un algoritmo más eficiente. Claramente, $c_N = P(x_0)$, de modo que este coeficiente se obtiene aplicando el algoritmo de Horner al polinomio P en el punto x_0. El algoritmo también genera el polinomio:

$$Q(x) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = d_0\ x^{N-1} + d_1\ x^{N-2} + \ldots + d_{N-2}\ x + d_{N-1} =$$
$$= c_0\ (x - x_0)^{N-1} + c_1\ (x - x_0)^{N-2} + \ldots + c_{N-1}\ .$$

Esto demuestra que el segundo coeficiente, c_{N-1}, se puede obtener aplicando el algoritmo de Horner al polinomio Q con el punto x_0, ya que $d_{N-1} = c_{N-1} = Q(x_0)$. El proceso se repite hasta que se encuentren todos los coeficientes c_k.

Ejemplo 2.

Encontrar el desarrollo de Taylor alrededor del punto $x_0 = 3$, para el polinomio

$$P(x) = x^4 - 4\ x^3 + 7\ x^2 - 5\ x - 2\ .$$

El trabajo se puede arreglar de la manera siguiente:

	1	-4	7	-5	-2
$x_0 = 3$		3	-3	12	21
	1	-1	4	7	$19 = P(3) = c_4$
$x_0 = 3$		3	6	30	
	1	2	10	$37 = c_3$	
$x_0 = 3$		3	15		
	1	5	$25 = c_2$		
$x_0 = 3$		3			
	$1 = c_0$	$8 = c_1$			

Entonces, el cálculo muestra que

$$P(x) = (x - 3)^4 + 8\ (x - 3)^3 + 25\ (x - 3)^2 + 37\ (x - 3) + 19\ .$$

Ejemplo 3.

Encontrar una aproximación a uno de los ceros de

$$P(x) = 2\ x^4 - 3\ x^2 + 3\ x - 4\ .$$

Hacer los calculos con aritmética de cuatro dígitos significativos y usar el procedimiento de Newton-Raphson y división sintética para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ para cada iteración.

Usando $x_0 = -2$ como una aproximación inicial, obtenemos $P(-2)$ por:

	2	0	-3	3	-4
$x_0 = -2$		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$10 = P(-2)$

Usando el Teorema XII.4 y la ecuación $(XII.7)$, obtenemos

$$Q(x) = 2\ x^3 - 4\ x^2 + 5\ x - 7 \qquad \text{y} \qquad P'(-2) = Q(-2)\ ;$$

así, $P'(-2)$ se puede encontrar de una manera similar, evaluando $Q(-2)$:

	2	-4	5	-7
$x_0 = -2$		-4	16	-42
	2	-8	21	$-49 = Q(-2) = P'(-2)$

y

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796\ .$$

Repitiendo el procedimiento para encontrar x_2, tenemos que

	2	0	-3	3	-4
-1.796		-3.592	6.451	-6.198	5.744
	2	-3.592	3.451	-3.198	$1.744 = P(x_1)$
-1.796		-3.592	12.90	-29.36	
	2	-7.184	16.35	$-32.56 = Q(x_1) = P'(x_1)$	

Así $P(-1.796) = 1.744$, $P'(-1.796) = -32.56$, y

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = -1.796 - \frac{1.744}{-32.56} \approx -1.742\ .$$

Un cero real con cinco dígitos decimales significativos es -1.74259.

Nótese que el polinomio denotado por Q depende de la aproximación usada y cambia de iteración a iteración.

Un problema al aplicar el método de Newton a polinomios es el concerniente a la posibilidad de que el polinomio tenga raíces complejas aún cuando todos los coeficientes sean números reales. Si la aproximación inicial al usar el método de Newton es un número real, todas las aproximaciones sucesivas serán también números reales. Una manera de superar esta dificultad es empezar con aproximaciones iniciales no reales y hacer todos los cálculos usando aritmética compleja. Un enfoque diferente se basa en el siguiente Teorema.

Teorema XII.5

Si $z = \beta + \gamma\ i$ es un cero complejo de multiplicidad m del polinomio P, entonces $\bar{z} = \beta - \gamma\ i$ es también un cero de multiplicidad m del polinomio P y $(x^2 - 2\ \beta\ x + \beta^2 + \gamma^2)^m$ es un factor de P.

Consideremos ahora el problema de evaluar un polinomio $P(x)$ en un valor complejo del argumento $x = \beta + i\,\gamma$, donde los coeficientes $a_k = b_k + i\,c_k$ son complejos. Poniendo $d_k = Q_k + i\,R_k$ obtenemos:

$$\begin{cases} Q_n = b_0 \;, \qquad R_0 = c_n \\ Q_k = Q_{k-1}\,\beta - R_{k-1}\,\gamma + b_k \;, \quad k = 1, 2, \ldots, N \;, \\ R_k = R_{k-1}\,\beta + Q_{k-1}\,\gamma + c_k \;, \quad k = 1, 2, \ldots, N \;, \end{cases}$$

Entonces, la división sintetica compleja funciona de la siguiente manera:

	Coef. de x^N	Coef. de x^{N-1}	$\ldots$ $\ldots$	Coef. de x	Término constante
	$b_0\;,\;\; c_0$	$b_1\;,\;\; c_1$	$\ldots$	$b_{N-1}\;,\;\; c_{N-1}$	$b_N\;,\;\; c_N$
$\beta + i\,\gamma$		$Q_0\beta - R_0\gamma\;,$ $Q_0\gamma + R_0\beta$	$\ldots$ $\ldots$	$Q_{N-2}\beta - R_{N-2}\gamma\;,$ $Q_{N-2}\gamma + R_{N-2}\beta$	$Q_{N-1}\beta - R_{N-1}\gamma\;,$ $Q_{N-1}\gamma + R_{N-1}\beta$
	$Q_0\;,\;\; R_0$	$Q_1\;,\;\; R_1$	$\ldots$	$Q_{N-1}\;,\;\; R_{N-1}$	$Q_N\;,\;\; R_N$

Ejemplo 4.

Evaluar $P(x) = (1 + i)\; x^3 + 2$ en $x_0 = (1 - i)$ usando el método de Horner y la división sintetica compleja.

La tabla de la división sintetica será la siguiente:

	$1\;,\;\; 1$	$0\;,\;\; 0$	$0\;,\;\; 0$	$2\;,\;\; 0$
$1 - i$		$2\;,\;\; 0$	$2\;,\, -2$	$0\;,\, -4$
	$1\;,\;\; 1$	$2\;,\;\; 0$	$2\;,\, -2$	$2\;,\, -4$

Entonces, $P(1 - i) = 2 - 4\;i$, como se puede verificar desde $(1 + i)\;(1 - i)^3 + 2 = 2\;(1 - i)^2 + 2 = -4\;i + 2$. Las derivadas se pueden obtener de la misma manera.

Vamos a dar ahora otro ejemplo de la aplicación del método de Newton-Raphson.

Ejemplo 5.

Encontrar una aproximación a los ceros de

$$P(x) = x^3 - 2 = 0 \;,$$

usando el procedimiento de Newton-Raphson y división sintética para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ para cada iteración, con aritmética de cuatro dígitos.

Con el valor inicial $x_0 = 1$, obtenemos:

	1	0	0	-2
$x_0 = 1$		1	1	1
	1	1	1	$-1 = P(1)$
$x_0 = 1$		1	2	
	1	2	$3 = P'(1)$	

Entonces,

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{3} \approx 1.333 \ .$$

Repitiendo el procedimiento para encontrar x_2, tenemos que

	1	0	0	−2
$x_1 = 1.333$		1.333	1.777	2.369
	1	1.333	1.777	$0.369 = P(1.333)$
$x_1 = 1.333$		1.333	3.553	
	1	2.666	$5.330 = P'(1.333)$	

Así $P(1.333) = 0.369$, $P'(1.333) = 5.330$, y

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = 1.333 - \frac{0.369}{5.330} \approx 1.264 \ .$$

Después de dos iteraciones hemos obtenido un valor aproximado de 1.264, que no está mal comparado con el valor verdadero $p \approx 1.260$ ($p^3 = 2$). Evidentemente el proceso es convergente. Sin embargo, no hay ninguna posibilidad de convergencia a una de las dos raíces complejas $-0.630 \pm 1.091\ i$ si no usamos un valor inicial complejo. Así que ahora repetimos la división sintetica y las iteraciones del método de Newton con la aproximación inicial $x_0 = i$.

	1 , 0	0 , 0	0 , 0	−2 , 0
$0 + 1\ i$		0 , 1	−1 , 0	0 , −1
	1 , 0	0 , 1	−1 , 0	−2 , −1
$0 + 1\ i$		0 , 1	−2 , 0	
	1 , 0	0 , 2	−3 , 0	

Así $P(i) = -2 - i$, $P'(i) = -3$, y

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = i - \frac{-2-i}{-3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\ i \ .$$

Entonces, parece que el método converge a la raíz compleja $-0.630 + 1.091\ i$.

2. LA TECNICA DE DEFLACION

Si la $n-$ésima iteración, x_n, en el procedimiento de Newton-Raphson es un cero aproximado del polinomio P de grado N, entonces

$$P(x) = (x - x_n)\ Q(x) + d_N = (x - x_n)\ Q(x) + P(x_n) \approx (x - x_n)\ Q(x) \ ;$$

de lo cual, $x - x_n$ es un factor aproximado de $P(x)$. Tomando $\hat{x}_1 = x_n$ como un cero aproximado de P y $Q_1(x)$ como el factor aproximado,

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)\ Q_1(x) \ ,$$

podemos encontrar un segundo cero aproximado de P aplicando el procedimiento de Newton-Raphson a $Q_1(x)$. Si P es un polinomio de grado N con N ceros reales, este procedimiento aplicado repetidamente, resultará eventualmente en $(N-2)$ ceros aproximados de P y en un factor cuadrático aproximado $Q_{N-2}(x)$. A este nivel, $Q_{N-2}(x)=0$ puede resolverse por la fórmula cuadrática para encontrar los dos últimos ceros aproximados de P. Aún cuando este método puede ser usado para encontrar ceros aproximados de muchos polinomios, depende del uso repetido de aproximaciones y en ocasiones puede llevar a aproximaciones muy imprecisas. Este procedimiento se llama **deflación**. La dificultad de precisión de la deflación se debe al hecho de que, cuando obtenemos los ceros aproximados de P, el procedimiento de Newton-Raphson se usa en el polinomio reducido Q_k, o sea, el polinomio con la propiedad de que

$$P(x) \approx (x-\hat{x}_1)\ (x-\hat{x}_2)\ \ldots\ (x-\hat{x}_k)\ Q_k(x)\ .$$

Un cero aproximado $\hat{x}_{k+1}$ de Q_k generalmente no aproximará a una raíz de $P(x)=0$ tan bien como una raíz de $Q_k(x)=0$. La imprecisión usualmente es incrementada conforme k crezca. Una manera de eliminar esta dificultad consiste en usar las ecuaciones reducidas, esto es, los factores aproximados del polinomio original P, para encontrar aproximaciones, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, ..., $\hat{x}_k$ a los ceros de P y luego mejorar estas aproximaciones aplicando el procedimiento de Newton-Raphson al polinomio original P.

La deflación se usa con el método de Müller una vez que se ha determinado una raíz aproximada. Después de que se ha determinado una aproximación a la raíz de la ecuación deflactada es aconsejable usar, ya sea en el método de Müller o en el método de Newton, el polinomio original con esta aproximación como condición inicial. Esto asegurará que la raíz que se está aproximando sea una solución de la ecuación verdadera y no de la ecuación deflactada.

La siguiente técnica ha sido sugerida por Wilkinson: una vez encontrada una raíz p, entonces se considera la función

$$T(x)=\frac{P(x)}{x-p}\ .$$

El método de Newton se aplica entonces a la función $T(x)$ para dar

$$x_{n+1}=x_n-\frac{T(x_n)}{T'(x_n)}=x_n-[\frac{P'(x_n)}{P(x_n)}-\frac{1}{x_n-p}]^{-1}\ .$$

De esta manera uno puede trabajar con el polinomio original $P(x)$ en vez del polinomio deflactado, reduciendo el error. En general, habiendo encontrado los ceros p_1, p_2, ..., p_s, se puede usar la fórmula general

$$x_{n+1}=x_n-[\frac{P'(x_n)}{P(x_n)}-\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{x_n-p_k}]^{-1}\ .$$

Se ha indicado previamente que el éxito del método de Newton depende frecuentemente de la obtención de una buena aproximación inicial. Una aproximación inicial x_0

mal escogida puede originar que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverga también por polinomios. Si el polinomio real $P(x)$ no tiene raíces reales, entonces el método de Newton tiene que diverger para cualquier valor inicial $p_0 \in \mathcal{R}$. No hay reglas generales para escoger valores iniciales en el caso de polinomios genéricos, aunque la idea básica para encontrar ceros aproximados de P es la siguiente: evaluar P en puntos x_i para $i = 1, 2, \ldots, k$. Si $P(x_i)\ P(x_j) < 0$, entonces P tiene un cero entre x_i y x_j. El problema se transforma en escoger las x_i de tal manera que la posibilidad de perder un cambio de signo se minimice, mientras se mantiene el número de las x_i razonablemente pequeño. Sin embargo, existe una regla en el caso en que el polinomio tenga todas las raíces reales.

Teorema XII.6

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $N \geq 2$ con coeficientes reales. Si todas las raíces ξ_i de $P(x)$ son reales y $\xi_N \leq \xi_{N-1} \leq \ldots \leq \xi_2 \leq \xi_1$, entonces el método de Newton lleva a una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente y estrictamente decreciente para cualquier valor inicial $p_0 > \xi_1$.

Demostración: sin perder generalidad podemos asumir que $P(p_0) > 0$. Dado que $P(x)$ no cambia de signo para $x > \xi_1$, tenemos que $P(x) = a_0\ x^N + \ldots + a_N > 0$ para $x > \xi_1$, y entonces $a_0 > 0$. La derivada P' tiene $N-1$ ceros reales α_i con (para el Teorema de Rolle)

$$\xi_N \leq \alpha_{N-1} \leq \xi_{N-1} \leq \ldots \leq \alpha_2 \leq \xi_2 \leq \alpha_1 \leq \xi_1 \ .$$

Dado que $P'(x)$ es de grado $N-1 \geq 1$, éstas son todas las raíces, y además $P'(x) > 0$ para $x > \alpha_1$, dado que $a_0 > 0$. Usando otra vez el Teorema de Rolle, y recordando que $N \geq 2$, obtenemos:

$$P''(x) > 0 \quad \text{y} \quad P'''(x) \geq 0 \qquad \text{para} \quad x \geq \alpha_1 \ .$$

Entonces, P y P' son funciones convexas para $x \geq \alpha_1$. Ahora bien, el hecho de que $p_n \geq \xi_1$ implica que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{P(p_n)}{P'(p_n)} < p_n$$

dado que $P'(p_n) > 0$ y $P(p_n) > 0$.

Nos queda por demostrar que $p_{n+1} > \xi_1$. Por el Teorema de Taylor tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = P(\xi_1) &= P(p_n) + (\xi_1 - p_n)\ P'(p_n) + \frac{(\xi_1 - p_n)^2}{2}\ P''(\delta) \\ &> P(p_n) + (\xi_1 - p_n)\ P'(p_n) \end{aligned}$$

dado que $\alpha_1 \leq \xi_1 < \delta < p_n$ implica que $P''(\delta) > 0$. De la definición de p_{n+1} se tiene que $P(p_n) = P'(p_n)\ (p_n - p_{n+1})$. Entonces,

$$0 > P'(p_n)\ (p_n - p_{n+1} + \xi_1 - p_n) = P'(p_n)\ (\xi_1 - p_{n+1})$$

que implica $\xi_1 - p_{n+1} < 0$ dado que $P'(p_n) > 0$, es decir, $p_{n+1} > \xi_1$. **c.q.d.**

3. EL METODO DE BAIRSTOW

Basandose sobre el Teorema XII.5, se puede diseñar una división sintética que involucre polinomios cuadráticos para factorizar aproximadamente el polinomio, de tal manera que uno de los términos sea un polinomio cuadrático cuyas raíces complejas sean aproximaciones a las raíces del polinomio original. Para introducir la **división sintetica cuadrática**, consideremos el polinomio $P(x)$ de grado N, de la forma $(XII.1)$, $P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N$ y sea $x^2 - r\ x - s$ un término cuadrático fijo. Entonces, podemos escribir $P(x)$ de la forma

$$P(x) = (x^2 - r\ x - s)\ Q(x) + u\ (x - r) + v\ , \qquad (XII.8)$$

donde los términos $u\ (x - r) + v$ costituyen el resto cuando el polinomio $P(x)$ se divide entre $x^2 - r\ x - s$. Así, $Q(x)$ es un polinomio de grado $(N - 2)$ y se puede representar como

$$Q(x) = b_0\ x^{N-2} + b_1\ x^{N-3} + \ldots + b_{N-3}\ x + b_{N-2}\ . \qquad (XII.9)$$

Si ponemos $b_{N-1} = u$ y $b_N = v$, entonces la ecuación $(XII.8)$ se puede reescribir como

$$P(x) = (x^2 - r\ x - s)\ (b_0\ x^{N-2} + b_1\ x^{N-3} + \ldots + b_{N-3}\ x + b_{N-2}) + b_{N-1}\ (x - r) + b_N\ ,$$

que representado en potencias de x tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) = & \ b_0\ x^N + (b_1 - r\ b_0)\ x^{N-1} + (b_2 - r\ b_1 - s\ b_0)\ x^{N-2} + \\ & + \ldots + (b_k - r\ b_{k-1} - s\ b_{k-2})\ x^k + \ldots + \\ & + (b_{N-1} - r\ b_{N-2} - s\ b_{N-3})\ x + b_N - r\ b_{N-1} - s\ b_{N-2}\ . \end{aligned} \qquad (XII.10)$$

Comparando los coeficientes de las potencias x^k de la ecuación $(XII.10)$ con los de la $(XII.1)$, obtenemos los números b_k. Las fórmulas recursivas son las siguientes:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + r\ b_0 \\ b_k = a_k + r\ b_{k-1} + s\ b_{k-2} \quad \text{para } k = 2, 3, \ldots, N\ . \end{cases} \qquad (XII.11)$$

Cuando se hacen los cálculos a mano, se construye una nuova tabla para esta división sintetica cuadrática que tiene la siguiente forma.

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_k	$\ldots$	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
s			$s\ b_0$	$s\ b_1$	$\ldots$	$s\ b_{k-2}$	$\ldots$	$s\ b_{N-4}$	$s\ b_{N-3}$	$s\ b_{N-2}$
r		$r\ b_0$	$r\ b_1$	$r\ b_2$	$\ldots$	$r\ b_{k-1}$	$\ldots$	$r\ b_{N-3}$	$r\ b_{N-2}$	$r\ b_{N-1}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N

Ejemplo 6.

Usar la división sintetica cuadrática para dividir entre $(x^2 + 2\ x - 3)$ el polinomio $P(x) = x^5 + 6\ x^4 - 20\ x^2 + 22\ x + 8$.

En este caso nesesitamos usar $r = -2$ y $s = 3$; entonces se construye la tabla siguiente:

	1	6	0	-20	22	8
$s = 3$			3	12	-15	6
$r = -2$		-2	-8	10	-4	-6
	1	4	-5	2	$b_1 = 3$	$b_0 = 8$

Entonces, el polinomio $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x^2 + 2\ x - 3)\ (x^3 + 4\ x^2 - 5\ x + 2) + 3\ (x + 2) + 8\ .$$

Ahora usaremos la división sintetica cuadrática para introducir una técnica, conocida como el **método de Bairstow**, que es usada para encontrar un factor cuadrático, del tipo $(x^2 - r\ x - s)$, del polinomio $P(x)$.

Suponemos que empezamos con un factor cuadrático inicial

$$x^2 - r_0\ x - s_0 \qquad (XII.12)$$

y que el polinomio $P(x)$ se pueda expresar como

$$P(x) = (x^2 - r_0\ x - s_0)\ Q(x) + u\ (x - r_0) + v\ . \qquad (XII.13)$$

Cuando u y v son pequeños, el polinomio cuadrádico $(XII.12)$ está cerca del factor del polinomio $P(x)$. Queremos encontrar nuevos valores r_1 y s_1 de manera que

$$x^2 - r_1\ x - s_1 \qquad (XII.14)$$

sea más cerca al factor de $P(x)$ que el polinomio cuadrático inicial $(XII.12)$. Nótese que u y v en $(XII.13)$ son funciones de r y s, así que $u = u(r, s)$ y $v = v(r, s)$. Los nuevos valores r_1 y s_1 satisfacen las relaciones

$$r_1 = r_0 + \Delta r \qquad \text{y} \qquad s_1 = s_0 + \Delta s\ . \qquad (XII.15)$$

Los diferenciales de las funciones u y v dan las aproximaciones

$$\begin{aligned} v(r_1, s_1) &\approx v(r_0, s_0) + v_r(r_0, s_0)\Delta r + v_s(r_0, s_0)\Delta s\ , \\ u(r_1, s_1) &\approx u(r_0, s_0) + u_r(r_0, s_0)\Delta r + u_s(r_0, s_0)\Delta s\ . \end{aligned} \qquad (XII.16)$$

Si el polinomio cuadrático $(XII.14)$ es un factor del polinomio $P(x)$, entonces los nuevos valores r_1 y s_1 tienen que satisfacer

$$u(r_1, s_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad v(r_1, s_1) = 0\ . \qquad (XII.17)$$

Cuando las cuantidades Δr y Δs son pequeñas, las aproximaciones $(XII.16)$ se pueden usar de manera que Δr y Δs sean la solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} 0 &= v(r_0, s_0) + v_r(r_0, s_0)\Delta r + v_s(r_0, s_0)\Delta s \ , \\ 0 &= u(r_0, s_0) + u_r(r_0, s_0)\Delta r + u_s(r_0, s_0)\Delta s \ . \end{aligned} \qquad (XII.18)$$

Si se conocen los valores de las derivadas parciales que aparecen en el sistema $(XII.18)$, entonces Δr y Δs se pueden calcular usando las fórmulas de Cramer, y los nuevos valores de r_1 y s_1 se obtienen desde las ecuaciones $(XII.15)$. Deduciremos más adelante las expresiones de las derivadas parciales; por el momento decimos que estas están dadas por

$$v_r = c_{N-1}, \qquad v_s = c_{N-2}, \qquad u_r = c_{N-2}, \qquad u_s = c_{N-3} \ , \qquad (XII.19)$$

donde los coeficientes c_k están dados por las fórmulas recursivas

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 + r\ c_0 \\ c_k = b_k + r\ c_{k-1} + s\ c_{k-2} \quad \text{para } k = 2, 3, \ldots, N \ . \end{cases} \qquad (XII.20)$$

Las fórmulas $(XII.20)$ usan los coeficientes b_k que se habían calculado en las fórmulas recursivas $(XII.11)$. Dado que $u(r_0, s_0) = b_{N-1}$ y $v(r_0, s_0) = b_N$, el sistema lineal $(XII.18)$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} c_{N-1}\Delta r + c_{N-2}\Delta s &= -\, b_N \ , \\ c_{N-2}\Delta r + c_{N-3}\Delta s &= -\, b_{N-1} \ . \end{aligned} \qquad (XII.21)$$

Usamos ahora las fórmulas de Cramer para resolver el sistema $(XII.21)$. Los determinantes que se necesitan son

$$D = \det\begin{pmatrix} c_{N-1} & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-3} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \det\begin{pmatrix} -b_N & c_{N-2} \\ -b_{N-1} & c_{N-3} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \det\begin{pmatrix} c_{N-1} & -b_N \\ c_{N-2} & -b_{N-1} \end{pmatrix},$$

y los nuevos valores r_1 y s_1 se calculan como

$$r_1 = r_0 + \frac{D_1}{D} \qquad \text{y} \qquad s_1 = s_0 + \frac{D_2}{D} \ . \qquad (XII.22)$$

El proceso iterativo continua hasta que se encontren buenas aproximaciones de r y s. Si las aproximaciones iniciales r_0 y s_0 se escogen pequeñas, la iteración en general converge. Cuando $x \approx 0$, las potencias grandes de x en el polinomio $P(x)$, $(XII.1)$, se pueden trascurar, y tenemos la aproximación $0 \approx P(x) \approx a_{N-2}\ x^2 + a_{N-1}\ x + a_N$. Entonces, las aproximaciones iniciales podrían ser

$$r_0 = -\frac{a_{N-1}}{a_{N-2}} \qquad \text{y} \qquad s_0 = -\frac{a_N}{a_{N-2}} \ , \qquad (XII.23)$$

siempre que $a_{N-2} \neq 0$.

Vamos ahora a derivar las fórmulas $(XII.20)$. La idea es diferenciar las ecuaciones $(XII.11)$ con respecto a r y s. Para empezar, nótese que $b_0 = a_0$ es una constante, así que sus derivadas parciales son cero. Continuando en la lista obtenemos

$$
\begin{aligned}
& & \frac{\partial}{\partial s} b_0 &= 0 \ , \\
\frac{\partial}{\partial r} b_0 &= 0 \ , & \frac{\partial}{\partial s} b_1 &= 0 \ , \\
\frac{\partial}{\partial r} b_1 &= b_0 \ , & \frac{\partial}{\partial s} b_2 &= b_0 + r\ \frac{\partial}{\partial s} b_1 = b_0 \ , \\
\frac{\partial}{\partial r} b_2 &= b_1 + r\ \frac{\partial}{\partial r} b_1 & \frac{\partial}{\partial s} b_3 &= b_1 + r\ \frac{\partial}{\partial s} b_2 + s\ \frac{\partial}{\partial s} b_1 \\
&= b_1 + r\ b_0 \ , & &= b_1 + r\ b_0 \ .
\end{aligned}
\tag{XII.24}
$$

Diferenciando el término general en $(XII.11)$ con respecto a r y s, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} b_k = 0 + b_{k-1} + r\ \frac{\partial}{\partial r} b_{k-1} + 0 + s\ \frac{\partial}{\partial r} b_{k-2} \ , \tag{XII.25}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} b_{k+1} = 0 + 0 + r\ \frac{\partial}{\partial s} b_k + b_{k-1} + s\ \frac{\partial}{\partial s} b_{k-1} \ . \tag{XII.26}$$

Entonces, empezando con las ecuaciones $(XII.24)$ y usando las $(XII.25)$ y $(XII.26)$, sigue que

$$\frac{\partial}{\partial r} b_k = \frac{\partial}{\partial s} b_{k+1} \ , \qquad \text{para} \ \ k = 0, 1, \ldots, N \ . \tag{XII.27}$$

Y si definimos c_{k-1} el término común en $(XII.27)$, entonces, $(XII.25)$ se puede usar para mostrar que

$$
\begin{aligned}
c_{k-1} = \frac{\partial}{\partial r} b_k &= b_{k-1} + r\ \frac{\partial}{\partial r} b_{k-1} + s\ \frac{\partial}{\partial r} b_{k-2} = \\
&= b_{k-1} + r\ c_{k-2} + s\ c_{k-3} \ .
\end{aligned}
\tag{XII.28}
$$

Un método compacto para el cálculo es poner

$$b_{-1} = b_{-2} = c_{-1} = c_{-2} = 0 \ , \tag{XII.29}$$

$$b_k = a_k + r\ b_{k-1} + s\ b_{k-2} \quad \text{y} \quad c_k = b_k + r\ c_{k-1} + s\ c_{k-2} \ , \tag{XII.30}$$

para $k = 0, 1, \ldots, N$, como dicho en las fórmulas $(XII.20)$.

Cuando se hacen los cálculos a mano del método de Bairstow, se construye una extensión de la tabla para la división sintetica cuadrática que tiene la siguiente forma.

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{N-3}	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
s			$s\ b_0$	$s\ b_1$	$\ldots$	$s\ b_{N-5}$	$s\ b_{N-4}$	$s\ b_{N-3}$	$s\ b_{N-2}$
r		$r\ b_0$	$r\ b_1$	$r\ b_2$	$\ldots$	$r\ b_{N-4}$	$r\ b_{N-3}$	$r\ b_{N-2}$	$r\ b_{N-1}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_{N-3}	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N
s			$s\ c_0$	$s\ c_1$	$\ldots$	$s\ c_{N-5}$	$s\ c_{N-4}$	$s\ c_{N-3}$	
r		$r\ c_0$	$r\ c_1$	$r\ c_2$	$\ldots$	$r\ c_{N-4}$	$r\ c_{N-3}$	$r\ c_{N-2}$	
	c_0	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{N-3}	c_{N-2}	c_{N-1}	

Ejemplo 7.

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + 3\ x^2 + 4\ x + 6$, usar el método de Bairstow, empezando con $r_0 = -2.1$ y $s_0 = -1.9$, para encontrar r_1, s_1, r_2, s_2, ..., los factores cuadráticos y las raíces de $P(x)$.

La tabla para calcular r_1 y s_1 es

	1.0000	1.0000	3.0000	4.0000	6.0000
$s = -1.9$			-1.9000	2.0900	-6.4790
$r = -2.1$		-2.1000	2.3100	-7.1610	2.2491
	1.0000	-1.1000	3.4100	$-1.0710 = b_3$	$1.7701 = b_4$
$s = -1.9$			-1.9000	6.0800	
$r = -2.1$		-2.1000	6.7200	-17.283	
	1.0000	$-3.2000 = c_1$	$8.2300 = c_2$	$-12.274 = c_3$	

El sistema lineal para Δr y Δs resultante es entonces

$$-12.274\ \Delta r + 8.2300\ \Delta s = -1.7701\ ,$$
$$8.2300\ \Delta r - 3.2000\ \Delta s = 1.0710\ .$$

Usamos ahora las fórmulas de Cramer para resolver este sistema. Los determinantes son

$$D = -28.4561\ , \quad D_1 = -3.15001\ , \quad D_2 = 1.422469\ .$$

Entonces, los nuevos valores r_1 y s_1 son

$$r_1 = -2.1 + \frac{-3.15001}{-28.4561} = -1.98930282 \quad \text{y} \quad s_1 = -1.9 + \frac{1.422469}{-28.4561} = -1.94998819\ .$$

Otra iteración nos daría $r_2 = -1.99999277$ y $s_2 = -2.00015098$. Las sucesiones convergen a los valores $r = -2$ y $s = -2$, y $P(x)$ tiene la siguiente factorización

$$P(x) = (x^2 + 2\ x + 2)\ (x^2 - x + 3)\ .$$

Finalmente, sigue que las cuatro raíces complejas son

$$x_{1,2} = 1 \pm i \quad \text{y} \quad x_{3,4} = 0.5 \pm i\ 1.65831239\ .$$

4. EL METODO DE BERNOULLI

Los métodos discutidos en los capítulos anteriores son muy efectivos, pero solamente si se conoce una razonable primera aproximación a la solución deseada. Como obtener una tal primera aproximación es un problema que, para ecuaciones sin propiedades especiales, es de tal generalidad que no puede resolverse por reglas o algoritmos aplicables en todos los casos. Para polinomios, sin embargo, existen algoritmos que nos proporcionan la deseada primera aproximación sin que se tenga que usar otra información que el conocimiento de los coeficientes del polinomio. El primero de los dos algoritmos que vamos a estudiar es el método clásico de Bernoulli.

Para comenzar con el caso más censillo, supongamos que el polinomio de grado N

$$P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ , \qquad (XII.1)$$

cuyos coeficientes pueden ser complejos, tiene N ceros distintos, z_1, $z_2, \ldots, z_N$. Si miramos a la ecuación de diferencias

$$a_0\ x_n + a_1\ x_{n-1} + \ldots + a_N\ x_{n-N} = 0\ , \qquad (XII.31)$$

la solución $X = \{x_n\}$ (cualesquiera que sean sus valores iniciales) debe poderse representar en la forma

$$x_n = c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_N\ z_N^n\ , \qquad (XII.32)$$

en donde c_1, $c_2, \ldots, c_N$ son constantes adecuadas.

Para proseguir, formulemos las dos hipótesis siguientes:

i) El polinomio P tiene un solo cero dominante, es decir, uno de los ceros (por ejemplo, z_1) tiene un módulo mayor que el de todos los restantes:

$$|z_1| > |z_k|\ , \qquad k = 2, 3, \ldots, N\ . \qquad (XII.33)$$

ii) Los valores iniciales son tales que el cero dominante está representado en la solución $(XII.32)$, es decir, se tiene que

$$c_1 \neq 0\ . \qquad (XII.34)$$

Consideramos ahora la razón de dos valores consecutivos de la sucesión solución X. Usando $(XII.32)$ encontramos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c_1\ z_1^{n+1} + c_2\ z_2^{n+1} + \ldots + c_N\ z_N^{n+1}}{c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_N\ z_N^n}\ .$$

En virtud de $(XII.34)$ esto puede escribirse

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1\ \frac{1 + \frac{c_2}{c_1}\ \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{n+1} + \ldots + \frac{c_N}{c_1}\ \left(\frac{z_N}{z_1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{c_2}{c_1}\ \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{n} + \ldots + \frac{c_N}{c_1}\ \left(\frac{z_N}{z_1}\right)^{n}}\ . \qquad (XII.35)$$

Por $(XII.33)$, $|z_k/z_1| < 1$ para $k = 2, 3, \ldots, N$. Se sigue que

$$\left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \qquad (XII.36)$$

para $k = 2, 3, \ldots, N$. La fracción que multiplica a z_1 tiende pues a 1 cuando $n \to \infty$, y tenemos por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1\ .$$

Tenemos pues la siguiente formulación tentativa del **método de Bernoulli**:

- Escójanse valores arbitrarios x_0, $x_{-1}, \ldots, x_{1-N}$, y determínase la sucesión $X = \{x_n\}$ por la relación de recurrencia

$$x_n = -\frac{a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_N\ x_{n-N}}{a_0}\ , \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (XII.37)$$

- Fórmese luego la sucesión de cocientes

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}\ . \qquad (XII.38)$$

Hemos entonces probado que

Teorema XII.7

Si el cero dominante del polinomio P dado por $(XII.1)$ es único y si se satisface la condición $(XII.34)$, entonces los cocientes q_n están "*al final*" definidos y convergen al cero dominante del polinomio P.

Ejemplo 8.

Sea

$$P(x) = 70\ x^4 - 140\ x^3 + 90\ x^2 - 20\ x + 1\ .$$

La ecuación de diferencia $(XII.31)$ (resuelta para x_n), o que es lo mismo la ecuación $(XII.37)$, toma aquí la forma

$$x_n = \frac{140\ x_{n-1} - 90\ x_{n-2} + 20\ x_{n-3} - x_{n-4}}{70}\ .$$

En la siguiente tabla se dan los valores de n, de la sucesión x_n (iniciada con $x_0 = 1$, $x_n = 0$ para $n < 0$) y de la sucesión q_n.

Tabla 1

n	x_n	q_n
0	1.0	2.0
1	2.0	1.3571429
2	2.7142857	1.1578947
3	3.1428571	1.0668831
4	3.3530611	1.0176506
5	3.4122447	0.9883800
6	3.3725945	0.9699170
7	3.2711367	0.9578036
⋮	⋮	⋮
14	2.1627466	0.9330692
15	2.0179923	0.9323640
16	1.8815034	0.9318586
17	1.8815034	
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	0.93057

Lo precedente es un mero bosquejo del método de Bernoulli en el caso más sencillo posible. Todavía queda por hacer frente a cierto número de complicaciones como, por ejemplo, las siguentes: convergencia lenta, ceros de multiplicidad mayor que uno, elección desafortunada de valores iniciales y la presencia de varios ceros dominantes.

Incluso si las condiciones de convergencia del método de Bernoulli se satisfacen, la velocidad de convergencia puede ser baja. Entendemos por esto que el error de la aproximación q_n al cero z_1, $e_n = q_n - z_1 = \frac{x_{n+1}}{x_n} - z_1$ tiende a cero lentamente. Como en el caso de la iteración, puede ser posible acelerar la convergencia haciendo un uso juicioso de la información sobre la forma en que e_n tiende a cero. Para descrubir esta forma de convergencia, analizaremos los errores e_n con más atención. Continuaremos con nuestras hipótesis (i) y (ii), y aparte, suponemos que

$$|z_1| > |z_2| > |z_k| \ , \qquad k = 3, 4, \ldots, N \ , \tag{XII.39}$$

(el cero que sigue al dominante es el único cero de su módulo), y que

$$c_2 \neq 0 \ , \tag{XII.40}$$

(el cero que sigue al dominante está representado en la solución $\{x_n\}$).

Bajo estas hipótesis, el error

$$\begin{aligned} e_n = & \frac{c_1\ z_1^{n+1} + c_2\ z_2^{n+1} + \ldots + c_N\ z_N^{n+1} - z_1(c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_N\ z_N^n)}{c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_N\ z_N^n} = \\ = & \frac{c_2\ (z_2 - z_1)\ z_2^n + \ldots + c_n\ (z_n - z_1)\ z_N^n}{c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_N\ z_N^n} \ , \end{aligned}$$

puede escribirse en la forma

$$e_n = A\ t^n\ (1 + \varepsilon_n) \ , \tag{XII.41}$$

donde

$$A = \frac{c_2(z_2 - z_1)}{c_1} \ , \qquad t = \frac{z_2}{z_1}$$

y

$$1 + \varepsilon_n = \frac{1 + \dfrac{c_3(z_3 - z_1)}{c_2(z_2 - z_1)} \left(\dfrac{z_3}{z_2}\right)^n + \ldots + \dfrac{c_N(z_N - z_1)}{c_2(z_2 - z_1)} \left(\dfrac{z_N}{z_2}\right)^n}{1 + \dfrac{c_2}{c_1} \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n + \ldots + \dfrac{c_N}{c_1} \left(\dfrac{z_N}{z_1}\right)^n} \ .$$

En virtud de la condición $(XII.39)$, tenemos, aparte de $(XII.36)$, $\left(\dfrac{z_k}{z_2}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, para $k = 3, 4, \ldots, N$, y la razón que aparece en el segundo miembro tiene el límite 1 cuando $n \to \infty$. Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \ .$$

Como consecuencia,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = t\ \frac{1 + \varepsilon_{n+1}}{1 + \varepsilon_n} = t\ (1 + \delta_n)$$

donde $\delta_n = \frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Los errores e_n satisfacen pues las condiciones del Teorema X.4 que hace efectivo el proceso Δ^2 de Aitken. Tenemos pues como consecuencia inmediata el siguiente

Teorema XII.8

Bajo las hipótesis formuladas al comienzo de la presente sección, la sucesión $\{q'_n\}_{n=0}^{\infty}$ derivada de la sucesión $\{q_n\}$ por medio de la fórmula Δ^2 de Aitken

$$q'_n = q_n - \frac{(\Delta q_n)^2}{\Delta^2 q_n}$$

converge más rápidamente al cero dominante z_1 que la sucesión $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q'_n - z_1}{q_n - z_1} = 0 \ .$$

Ejemplo 9.

Sea el mismo polinomio del ejemplo 8

$$P(x) = 70\ x^4 - 140\ x^3 + 90\ x^2 - 20\ x + 1\ .$$

La siguiente tabla es una extensión de la tabla 1: se dan los valores de n, de la sucesión x_n (iniciada con $x_0 = 1$, $x_n = 0$ para $n < 0$), de la sucesión q_n y en la última columna los valores q'_n. También están dados los valores intermedios requeridos para calcular q'_n. La convergencia más rápida de la sucesión $\{q'_n\}$ al cero exacto $z_1 = 0.93057$ es evidente.

Tabla 2

n	x_n	q_n	Δq_n	$\Delta^2 q_n$	$-\frac{(\Delta q_n)^2}{\Delta^2 q_n}$	q'_n
0	1.0	2.0				
1	2.0	1.3571429				
2	2.7142857	1.1578947	−0.0910116	0.0417791	−0.1982597	0.9596350
3	3.1428571	1.0668831	−0.0492325	0.0199619	−0.1214233	0.9454595
4	3.3530611	1.0176506	−0.0292706	0.0108076	−0.0792746	0.9383760
5	3.4122447	0.9883800	−0.0184630	0.0063496	−0.0536856	0.9346444
6	3.3725945	0.9699170	−0.0121134	0.0039481	−0.0371658	0.9327512
7	3.2711367	0.9578036	−0.0081653	0.0025560		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	2.3154382	0.9340550	−0.0009858	0.0002806	−0.0034633	0.9305917
14	2.1627466	0.9330692	−0.0007052	0.0001998	−0.0024890	0.9305802
15	2.0179923	0.9323640	−0.0005054			
16	1.8815034	0.9318586				
17	1.8815034					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	0.93057	⋮	⋮	⋮	0.93057

Si el polinomio P tiene ceros no dominantes repetidos $z_2, \ldots, z_N$, entonces la fórmula $(XII.32)$ para la solución general de la ecuación de diferencias $(XII.31)$ contiene también términos de la forma $n^k\ z_2^n$. Por tanto, la expresión $(XII.35)$ contiene términos como $n^k\ \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n$ además de $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n$. Sin embargo, estos términos no pueden alterar la convergencia del método, ya que si $|q| < 1$, entonces tenemos no solamente que $q_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, sino que también $n^k\ q_n \to 0$ para cualquier valor fijo de k.

La situación es diferente si el cero *dominante* tiene una multiplicidad > 1. (Todavía estamos suponiendo que hay solo un único cero dominante). Para fijar las ideas, supongamos que la multiplicidad es 2. La relación $(XII.32)$ toma ahora la forma (suponiendo aún que $c_1 \neq 0$)

$$x_n = c_1\ n\ z_1^n + c_2\ z_1^n + c_3\ z_3^n + \ldots\ ,$$

donde $|z_3| < |z_1|$. La razón $(XII.35)$ toma ahora la forma (suponiendo aún que $c_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{c_1\ (n+1)\ z_1^{n+1} + c_2\ z_1^{n+1} + c_3\ z_3^{n+1} + \ldots}{c_1\ n\ z_1^n + c_2\ z_1^n + c_3\ z_3^n + \ldots} = \\ &= z_1\ \frac{(n+1)\ c_1 + c_2}{n\ c_1 + c_2}\ \frac{1 + \dfrac{c_3}{(n+1)\ c_1 + c_2}\ \left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^{n+1} + \ldots}{1 + \dfrac{c_3}{n\ c_1 + c_2}\ \left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^n + \ldots}\ .\end{aligned} \qquad (XII.42)$$

La convergencia aún tiene lugar, pero, debido al factor $\frac{(n+1)\ c_1+c_2}{n\ c_1+c_2} = 1 + \frac{1}{n+\frac{c_2}{c_1}}$ con una velocidad mucho menor; el error después de n pasos es ahora del orden de $1/n$ y no del de $(z_1/z_2)^n$ como sería el caso si el cero dominante tuviera multiplicidad igual a uno.

Una de las condiciones para la convergencia del algoritmo expresado en las fórmulas $(XII.37)$ y $(XII.38)$, era que $c_1 \neq 0$. Se puede mostrar por medio de la teoría de funciones de variables compleja que esta condición se satisface siempre si los valores iniciales se escogen como sigue:

$$x_{-N+1} = x_{-N+2} = \ldots = x_{-1} = 0\ , \qquad x_0 = 1\ . \qquad (XII.43)$$

Una elección de valores iniciales diferente y más sofisticada queda definida por el siguiente **algoritmo de Bernoulli**:

- Si los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_N$ han sido dados, calcúnse x_0, x_1, ..., x_{N-1} por las fórmulas

$$\begin{aligned} x_0 &= -\ \frac{a_1}{a_0}\ , \\ x_1 &= -\ \frac{1}{a_0}\ (2\ a_2 + a_1\ x_0)\ , \\ x_2 &= -\ \frac{1}{a_0}\ (3\ a_3 + a_2\ x_0 + a_1\ x_1)\ , \\ x_k &= -\ \frac{1}{a_0}\ ((k+1)\ a_{k+1} + a_k\ x_0 + a_{k-1}\ x_1 + \ldots + a_1\ x_{k-1})\ , \end{aligned} \qquad (XII.44)$$

en general, para $k = 1, 2, \ldots N-1$. Luego, como antes, determínase la sucesión $X = \{x_n\}$ por la relación de recurrencia

$$x_n = -\frac{a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_N\ x_{n-N}}{a_0}\ , \qquad n = N, N+1, N+2, \ldots. \qquad (XII.45)$$

- Fórmese luego la sucesión de cocientes

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \ . \qquad (XII.38)$$

Se puede demostrar por medio de la teoría de las funciones complejas el siguiente teorema del cual omitimos la demostración.

Teorema XII.9

Si cada uno de los ceros distintos z_i tienen multiplicidad m_i, con $i = 1, 2, \ldots, M$, $(M \leq N)$, y si los valores iniciales para el método de Bernoulli están determinados por $(XII.44)$, entonces que la relación $(XII.32)$ toma la forma

$$x_n = m_1 \ z_1^{n+1} + m_2 \ z_2^{n+1} + \ldots + m_M \ z_M^{n+1} \ , \qquad (XII.46)$$

La relación $(XII.46)$ es notable por el hecho de que no aparecen potencias de n, no obstante la posible presencia de ceros de multiplicidad más alta que uno. La dificultad de los ceros con multiplicidad > 1 puede pues así siempre ser evitada por una elección adecuada de los valores iniciales. La razón x_{n+1}/x_n converge entonces a una velocidad determinada solamente por la magnitud de los ceros mayores.

Ejemplo 10.

Vamos a comparar las sucesiones $\{q_n\}$ para el polinomio

$$p(x) = (x-3)^2(x+1)^2 = x^4 - 4 \ x^3 - 2 \ x^2 + 12 \ x + 9$$

generadas iniciando el método de Bernoulli por la $(XII.43)$ y por la $(XII.44)$. La relación de recurrencia es, tanto en un caso como en otro,

$$x_n = 4 \ x_{n-1} + 2 \ x_{n-2} - 12 \ x_{n-3} - 9 \ x_{n-4}$$

Tabla 3

n	x_n	q_n	x_n	q_n
-3	0			
-2	0			
-1	0			
0	1	4.0	4	5.0
1	4	4.5	20	2.6
2	18	3.78	52	3.15385
3	68	3.69	164	2.95122
4	251	3.54	484	3.01653
5	888	3.46	1460	2.99452
6	3076	3.40	4372	3.00183
7	10456	3.35	13124	2.99939
8	35061	3.32	39364	3.00020
9	116252	3.29	118100	2.99993
10	381974	3.26086	354292	3.00002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		3.00000		3.00000

La teoría que hasta el momento hemos venido desarrollando es aplicable perfectamente tanto si los coeficientes del polinomio P son reales como si son complejos. Sin embargo, siempre hemos supuesto que z_1 es el único cero dominante de P. Consideremos ahora el caso en que P es un polinomio con coeficientes reales que tiene un par de complejos conjugados como ceros dominantes, z_1 y $z_2 = \overline{z}_1$, ambos de multiplicidad 1. Los restantes ceros satisfarán la disegualdad

$$|z_k| < |z_1| , \qquad k = 3, 4, \ldots, N . \tag{XII.47}$$

Si los valores iniciales para la sucesión $\{x_n\}$ son reales, la ecuación $(XII.32)$ toma la forma

$$x_n = c_1\ z_1^n + \overline{c}_1\ \overline{z}_1^n + c_3\ z_3^n + \ldots + c_N\ z_N^n .$$

Representando los número complejos c_1 y z_1 en forma polar, escribimos $z_1 = r\ e^{i\ \varphi}$, $c_1 = a\ e^{i\ \delta}$, donde $r > 0$ y $a > 0$. Podemos suponer, además, que z_1 es el cero situado en el semiplano superior y, por consiguiente, que $0 < \varphi < \pi$. La expresión para x_n toma ahora la forma

$$x_n = 2\ a\ r^n\ \cos(n\ \varphi + \delta) + c_3\ z_3^n + \ldots + c_N\ z_N^n .$$

Esto puede escribirse

$$x_n = 2\ a\ r^n\ [\cos(n\ \varphi + \delta) + \theta_n] , \tag{XII.48}$$

con $\theta_n = \dfrac{c_3}{2\ a}\ \left(\dfrac{z_3}{r}\right)^n + \ldots + \dfrac{c_N}{2\ a}\ \left(\dfrac{z_N}{r}\right)^n$, de donde, para alguna C constante adecuada $|\theta_n| \leq C\ t^n$, en donde t denota la mayor de las razones $|z_k/r|$, $k = 3, \ldots N$. Por $(XII.47)$, el número t es menor que 1, y por tanto

$$\big|\lim_{n\to\infty} \theta_n\big| = 0 . \tag{XII.49}$$

Nuestro problema es el de recobrar las cantidades r y φ de la sucesión $\{x_n\}$. Para encontrar su solución, comencemos por suponer que $\theta_n = 0$ y tendremos en cuenta que los elementos $x_n = 2\ a\ r^n\ \cos(n\ \varphi + \delta)$ son solución de la ecuación de diferencias

$$x_n + A\ x_{n-1} + B\ x_{n-2} = 0 , \tag{XII.50}$$

donde $B = r^2$ y $A = -2\ r\ \cos\varphi$. Para determinar los coeficientes A y B partiendo de la solución conocida $\{x_n\}$, observamos que la ecuación $(XII.50)$ junto con la ecuación correspondiente con n aumentado de una unidad, $x_{n+1} + A\ x_n + B\ x_{n-1} = 0$, representa un sistema de dos ecuaciones lineales para las dos incognitas A y B. El determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_n & x_{n-1} \end{vmatrix} \tag{XII.51}$$

es igual a $4\ a^2\ r^{2n-2}\{\cos^2[(n-1)\varphi+\delta] - \cos(n\varphi+\delta)\ \cos[(n-2)\varphi+\delta]\} = 4\ a^2\ r^{2n-2}\sin^2\varphi$, por una identidad trigonométrica, y es, por tanto, diferente de cero, pues $0 < \varphi < \pi$. Podemos por tanto resolverlo para A y B, encontrando que

$$A = -\frac{E_n}{D_n} , \qquad B = \frac{D_{n+1}}{D_n} ,$$

donde

$$E_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_{n-1} \end{vmatrix} . \qquad (XII.52)$$

Las cantidades buscadas r y φ pueden ahora encontrarse por las igualdades

$$r = \sqrt{B} = \sqrt{\frac{D_{n+1}}{D_n}} , \qquad \cos\varphi = -\frac{A}{2r} = \frac{E_n}{2\sqrt{D_n\ D_{n+1}}} . \qquad (XII.53)$$

Las relaciones $(XII.53)$ resuelven nuestro problema si $\{x_n\}$ es una solución de la ecuación de diferencias $(XII.31)$ tal que $\theta_n = 0$ en $(XII.48)$. Si $\{x_n\}$ es una solución cualquiera de $(XII.31)$, $\theta_n \neq 0$ en general; sin embargo, usando $(XII.49)$ no es difícil probar que

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \to r^2 \quad \text{y} \quad \frac{E_n}{2\ D_n} \to r\ \cos\varphi , \qquad (XII.54)$$

cuando $n \to \infty$. Tenemos, por lo tanto, el siguiente algoritmo para encontrar una pareja de ceros dominantes complejos conjugados:

- Partiendo de la solución $\{x_n\}$ de la ecuación de diferencias $(XII.31)$, calcúlense los determinantes D_n y E_n definidos por las fórmulas $(XII.51)$ y $(XII.52)$.
- Fórmese con estos la sucesión de razones $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ y $\frac{E_n}{2\ D_n}$. Si la solución de la ecuación de diferencias $(XII.31)$ es tal que $c_1 \neq 0$ en $(XII.32)$, entonces las relaciones límites $(XII.54)$ se verifican.

Nótese que este algoritmo tiene la desventaja de no ser muy exacto cuando φ, el argumento del cero dominante, es pequeño.

Teorema XII.10

Si el polinomio $(XII.1)$ tiene exactamente dos ceros dominantes $z_{1,2} = r\ e^{\pm i\varphi}$, ambos de multiplicidad uno, con $0 < \varphi < \pi$. Si la solución de la ecuación de diferencias $(XII.31)$ es tal que $c_1 \neq 0$ in $(XII.32)$, entonces las relaciones límites $(XII.54)$ se verifican.

Una pregunta frecuente es: ¿cómo se pueden detectar un par de ceros complejos conjugados? La fórmula $(XII.48)$ muestra que en presencia de un par de ceros dominantes que sean complejos conjugados los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se comportan como $x_n = 2\ a\ r^n\ \cos(n\ \varphi + \delta)$. Esta ecuación implica, en particular, que los signos de las x_n oscilan. Por otra parte, viendo la frecuencia con la que estas oscilaciones se presentan, podemos esperar ser capaces de presentar una proposición acerca del ángulo φ. Es claro que cuando φ es pequeño, las "*ondas de signo*" son largas, y que cuando φ es próximo a π, las ondas son cortas.

Ejemplo 11.

Para el polinomio

$$P(x) = 81\ x^4 - 188\ x^3 + 24\ x + 20 ,$$

con ceros dominantes exactos $z_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{3} i$, el cálculo se efectúa como en la tabla siguiente. Es evidentemente innecesario calcular los determinantes D_n y E_n desde el principio.

Tabla 4

x_n	D_n	$\frac{D_{n+1}}{D_n}$	E_n	$\frac{E_n}{2\ D_n}$
1				
1.333333				
1.777778				
2.074074				
2.123457				
1.975309				
1.333333				
1.580247				
0.965707				
0.178022				
−0.718589				
−1.634438				
−2.470444				
−3.124966				
−3.504914	1.229324	1.111187	2.458740	1.000037
−3.537670	1.366009	1.111125	2.732037	1.000006
−3.180991	1.517807	1.111095	3.035585	0.999990
−2.431232	1.686428	1.111115	3.372868	1.000003
−1.328033	1.873816	1.111111	3.747630	0.999999
0.045304	2.082018	1.111113	4.164035	1.000000
1.566200	2.313358		4.626705	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		1.111111		1.000000

5. EL ALGORITMO DEL COCIENTE-DIFERENCIA

El método de Bernoulli tiene la desventaja de proporcionar solamente los ceros dominantes de un polinomio. Si se desea calcular un cero no dominante por el método de Bernoulli, es necesario primero calcular todos los ceros mayores, y luego sacarlos del polinomio por la técnica de deflación. Solamente en raras ocasiones se conocen exactamente estos ceros. Las sucesivas deflaciones tenderán pues a falsificar los ceros restantes. Discutiremos ahora una moderna extensión del método de Bernoulli, debida a Rutishauser, que tiene la ventaja de proveer aproximaciones simultáneas a *todos* los ceros. Como en el apartado anterior no se presenterá la demostración de los teoremas debido a la necesidad de usar la teoría de las funciones complejas, que no es prerrequisito de este curso.

El **algoritmo del cociente-diferencia (Q-D)** puede considerarse como una generalización del método de Bernoulli. Como en este último método, se nos da un polinomio

$$P(x) = a_0\ x^N + a_1\ x^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\ x + a_N\ , \qquad (XII.1)$$

y formamos una solución de la ecuación de diferencias asociada

$$a_0\ x_n + a_1\ x_{n-1} + \ldots + a_N\ x_{n-N} = 0\ . \qquad (XII.31)$$

La sucesión $\{x_n\}$ puede por ejemplo iniciarse haciendo

$$x_{-N+1} = x_{-N+2} = \ldots = x_{-1} = 0\ , \quad x_0 = 1\ . \qquad (XII.43)$$

En el método de Bernoulli, ahora formamos los cocientes

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = q_n^{(1)} \ . \qquad (XII.55)$$

Si el polinomio P tiene un solo cero dominante, entonces la sucesión $\{q_n\}$ converge a él.

Los elementos de esta sucesión $\{q_n\}$ se denotan ahora por $q_n^{(1)}$, y forman la primera columna del esquema bidimensional llamado el esquema del **cociente-diferencia (QD)**. Los elementos de las restantes columnas se denotan convencionalmente por $e_n^{(1)}$, $q_n^{(2)}$, $e_n^{(2)}$, $q_n^{(3)}$, ..., $e_n^{(N-1)}$, $q_n^{(N)}$ y se generan por la formación alternada de diferencias y cocientes, como sigue:

$$e_n^{(k)} = [q_{n+1}^{(k)} - q_n^{(k)}] + e_{n+1}^{(k-1)} \ , \qquad (XII.56)$$

$$q_n^{(k+1)} = \frac{e_{n+1}^{(k)}}{e_n^{(k)}} \ q_{n+1}^{(k)} \ , \qquad (XII.57)$$

en donde $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. En $(XII.56)$ hacemos $e_n^{(0)} = 0$ para $k = 1$. El número de columnas de q formadas es igual al grado del polinomio dado.

Ejemplo 12.

Para el grado $N = 4$, el esquema general QD tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & q_0^{(1)} & & & & & & \\
0 & & e_0^{(1)} & & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_0^{(2)} & & & & \\
0 & & e_1^{(1)} & & e_0^{(2)} & & & \\
 & q_2^{(1)} & & q_1^{(2)} & & q_0^{(3)} & & \\
0 & & e_2^{(1)} & & e_1^{(2)} & & e_0^{(3)} & \\
 & q_3^{(1)} & & q_2^{(2)} & & q_1^{(3)} & & q_0^{(4)} \\
0 & & e_3^{(1)} & & e_2^{(2)} & & e_1^{(3)} & \\
 & q_4^{(1)} & & q_3^{(2)} & & q_2^{(3)} & & q_1^{(4)} \\
0 & & e_4^{(1)} & & e_3^{(2)} & & e_2^{(3)} & \\
\vdots & q_5^{(1)} & \vdots & q_4^{(2)} & \vdots & q_3^{(3)} & \vdots & q_2^{(4)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

En cada columna del esquema los superíndices son constantes, y en cada diagonal son constantes los subíndices. Las reglas $(XII.56)$ y $(XII.57)$ pueden memorizarse observando que en cada una de las configuraciones análogas a rombos que se muestran en el esquema, o las sumas o los productos de los pares de elementos SW o NE, son iguales. Si un rombo está centrado en una columna q, las sumas son iguales; si está centrado en una columna e, son los productos los que son iguales. En vista de esta interpretación, frecuentemente se hace referencia a las fórmulas $(XII.56)$ y $(XII.57)$ llamándolas *reglas del rombo*.

El esquema QD puede describirse también de otra forma si introducimos, aparte del operador de diferencias progresiva Δ (definido por $\Delta \ x_n = x_{n+1} - x_n$), el operador cociente

Q definido por $Q\ x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Las relaciones $(XII.56)$ y $(XII.57)$ pueden entonces escribirse de manera más compacta del siguiente modo:

$$e_n^{(k)} = e_{n+1}^{(k-1)} + \Delta\ q_n^{(k)}\ , \qquad q_n^{(k+1)} = q_{n+1}^{(k)}\ Q\ e_n^{(k)}\ . \qquad (XII.58)$$

Ejemplo 13.

Veamos el esquema QD numérico del polinomio

$$P(x) = x^2 - x - 1\ .$$

La sucesión $\{x_n\}$ es la de Fibonacci.

Tabla 5

x_n	$e_n^{(0)}$	$q_n^{(1)}$	$e_n^{(1)}$	$q_n^{(2)}$	$e_n^{(2)}$
1	0				
		1.000000			
1	0		1.000000		
		2.000000		−1.000000	
2	0		−0.500000		−0.000001
		1.500000		−0.500001	
3	0		0.166667		−0.000001
		1.666667		−0.666669	
5	0		−0.066667		0.000002
		1.600000		−0.600000	
8	0		0.025000		0.000025
		1.625000		−0.624975	
13	0		−0.009615		−0.000049
		1.615385		−0.615409	
21	0		0.003663		−0.000171
		1.619048		−0.619243	
34	0		−0.001401		$\vdots$
		1.617647		$\vdots$	
55	0		$\vdots$		
		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$		$\downarrow$	
		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	

Evidentemente el esquema QD no existe si un coeficiente $e_n^{(k)}$, con $1 \leq k \leq N-1$ se hace cero. Otro caso trivial de no existencia del esquema se presenta cuando x_n llega a hacerse cero. Parece difícil enunciar condiciones explícitas necesarias y suficientes para la existencia del esquema en términos del polinomio P. En términos de la sucesión $\{x_n\}$, una condición necesaria y suficiente es que los determinantes

$$H_n^{(k)} = \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k-1} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \dots & x_{n+2k-2} \end{vmatrix}\ , \qquad (XII.59)$$

deben ser diferentes de cero para $k = 1, 2, \ldots, N$ y para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Es posible enunciar condiciones sencillas *suficientes* (pero no necesarias) para que éste sea el caso. Entre ellas tenemos las siguientes:

(i) Los ceros $z_1, z_2, \ldots, z_N$ de P son positivos, y la sucesión $\{x_n\}$ se inicia con el algoritmo $(XII.44)$.

(ii) Los ceros $z_1, z_2, \ldots, z_N$ de P son simples (pero no necesariamente reales) y tienen valores absolutos distintos, $|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_N| > 0$.

Hay una gran cantidad de evidencia numérica de que el esquema QD existe en muchos casos, incluso si no se satisfacen ningun de las anteriores condiciones suficientes, por ejemplo, si P es un polinomio con coeficientes reales que tienen como cero pares de complejos conjugados.

Si el esquema QD existe, son posibles varios enunciados notables acerca de los límites de sus elementos cuando $n \to \infty$. La situación más simple surge si los ceros del polinomio P satisfacen la condición

$$|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_N| > 0 \; . \qquad (XII.60)$$

Teorema XII.11

Si los ceros del polinomio P satisfacen la condición $(XII.60)$, tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} q_n^{(k)} = z_k \; , \quad k = 1, 2, \ldots, N \; , \qquad (XII.61)$$

es decir, la $k-$ésima q columna del esquema QD converge al $k-$ésimo cero del polinomio.

De $(XII.61)$ se sigue, en virtud de $(XII.56)$, que

$$\lim_{n\to\infty} e_n^{(1)} = 0 \; , \qquad (XII.62)$$

y de esto se deduce por inducción que

$$\lim_{n\to\infty} e_n^{(k)} = 0 \; , \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \; . \qquad (XII.63)$$

Así pues, bajo la condición $(XII.60)$, todas las columnas e del esquema QD tienden a cero.

Lo que no está a este punto claro es como tratar con varios ceros que tienen el mismo valor absoluto; la mayor parte de las veces esta situación se presenta en conexión con ceros complejos conjugados de polinomios reales. Tales ceros pueden también obtenerse de la tabla del QD.

Teorema XII.12

En el caso más común de ceros complejos conjugados se obtienen que los límites

$$\lim_{n\to\infty} [q_{n+1}^{(k+1)} + q_n^{(k+2)}] = A_k \; , \qquad (XII.64)$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{n+1}^{(k+1)} \cdot q_n^{(k+2)} = B_k \; , \qquad (XII.65)$$

existen, y que el polinomio $x^2 - A_k\ x + B_k$ tiene los ceros z_{k+1} y z_{k+2}.

Mencionamos para concluir el siguiente hecho, que juega el papel de control calculatorio:

Teorema XII.13

Las cantidades $e_n^{(N)}$ calculadas según $(XII.56)$ con $k = N$, son idénticamente nulas.

Como ya descrito, el esquema QD se construye procediendo de izquierda a derecha. La sucesión $\{x_n\}$ determina la primera columna q, $\{q_n^{(1)}\}$; de ella obtenemos sucesivamente las columnas $\{e_n^{(1)}\}$, $\{q_n^{(2)}\}, \ldots$, por medio de las relaciones $(XII.56)$ y $(XII.57)$. Sin embargo, este método de construcción del esquema QD no es factible en la práctica, porque sufre de **inestabilidad numérica** a causa de la grave pérdida de *dígitos significativos*. En análisis matemático, los números reales (o complejos) se conciben siempre como determinados con precisión absoluta. Numéricamente, los números reales pueden ser pensados como fracciones decimales infinitas. En el cálculo, como ya sabemos, un número real x nunca, salvo en raras excepciones, está representado exactamente, sino que tan solo aparece un número racional x^* que es su aproximación. Ya hemos estudiado las siguientes reglas sencillas, concernientes a la propagación de los errores de redondeo:

(i) Una suma o diferencia de dos números redondeados a^* y b^* tiene un error de redondeo absoluto del orde de la suma de los errores absolutos de a^* y b^*.

(i) Un producto o cociente de dos números redondeados a^* y b^* tiene un error de redondeo relativo del orde de la suma de los errores relativos de a^* y b^*.

El esquema QD ofrece una ilustración interesante de estas reglas. Para simplificar la situación, supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ está generada sin errores de redondeo y que se tiene la situación cubierta por las relaciones $(XII.60)$ y $(XII.61)$. Si nos quedamos con t decimales, los números $q_n^{(1)}$ tendrán entonces errores de redondeo del orden de 10^{-t}.. Los elementos $e_n^{(1)}$, formados obteniendo las diferencias de los $q_n^{(1)}$, tendrán de acuerdo con la regla (i) errores absolutos de la misma magnitud. Si embargo, como por la $(XII.63)$ los $e_n^{(1)}$ tienden a cero, sus errores relativos se hacen cada vez más grandes. Por tanto, por la regla (ii), las razones $e_{n+1}^{(1)}/e_n^{(1)}$ son cada vez calculadas con menor y menor exactitud y, de nuevo por la regla (ii), el error relativo de la cantidad $q_n^{(2)}$, según se determina por $(XII.57)$, aumenta sin límite. Como $q_n^{(2)}$ tiende a un límite distinto de cero cuando $n \to \infty$, lo mismo es cierto respecto del valor absoluto de $q_n^{(2)}$. Es claro que esta inestabilidad numérica se hace más y más acentuada a medida que k aumenta.

Ejemplo 14.

La pérdida de dígitos significativos está ilustrada ya en el ejemplo 13. La última columna $e_n^{(2)}$ debe teóricamente estar constituida por ceros. El hecho de que estos elementos no sean ceros, e incluso aumenten cuando n aumenta, muestra la influenci creciente de los errores de redondeo. Si se hacen los cálculos con más decimales, esto retrasará, pero al final no impedirá, el fenómeno de inestabilidad numérica.

El hecho de que el método de generar el esquema QD es inestable, no hace, desde luego, que las propiedades enunciadas anteriormente no sean ciertas, dados que ellas se refieren al esquema QD matemáticamente exacto, no redondeado.

El esquema QD puede generarse de una forma estable si se construye fila por fila en lugar de columna por columna. Para ver esto, resolvemos cada una de las relaciones de recurrencia $(XII.56)$ y $(XII.57)$ para el elemento sur del rombo en cuestión:

$$q_{n+1}^{(k)} = [e_n^{(k)} - e_{n+1}^{(k-1)}] + q_n^{(k)} , \qquad (XII.66)$$

$$e_{n+1}^{(k)} = \frac{q_n^{(k+1)}}{q_{n+1}^{(k)}} \; e_n^{(k)} . \qquad (XII.67)$$

Supongamos que conocemos una fila q y una fila e. La nueva fila q, calculada de acuerdo con $(XII.66)$, tendrá entonces, por la regla (i), errores absolutos de igual magnitud. El hecho de que los errores relativos en las e son grandes (debido a la pequeñez de las e) no tiene ahora importancia. Además, los errores relativos en la nueva fila e determinada según $(XII.67)$ son del mismo orden que en la anterior fila e, debido a la regla (ii). Aunque debe esperarse un aumento normal de propagación de error en el presente modo de generar el esquema, este es mucho menos serio que cuando el esquema está generado columna por columna.

Si el esquema está generado fila por fila, debe obtenerse de algún modo un primer par de filas. El siguiente algoritmo muestra cómo se consigue esto:

- Sean $a_0, a_1, \ldots, a_N$ constantes, todas distintas de cero. Hagamos:

$$q_0^{(1)} = -\frac{a_1}{a_0} , \qquad q_{1-k}^{(k)} = 0 , \qquad k = 2, 3, \ldots, N ; \qquad (XII.68)$$

$$e_{1-k}^{(k)} = \frac{a_{k+1}}{a_k} , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, N-1 . \qquad (XII.69)$$

- Considérense los elementos así generados como las primeras dos filas de un esquema QD, y genérense las filas siguientes por medio de $(XII.66)$ y $(XII.67)$, usando las condiciones suplementarias

$$e_n^{(0)} = e_n^{(N)} = 0 , \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (XII.70)$$

Como antes, hay la posibilidad teórica de ruptura del esquema por el hecho de que un denominador sea cero.

Ejemplo 15.

Para el grado $N = 4$, las filas superiores del esquema general QD tienen el aspecto de la tabla 6.

Ejemplo 16.

Para el polinomio

$$P(x) = 128\; x^4 - 256\; x^3 + 160\; x^2 - 32\; x + 1 ,$$

obtenemos el esquema QD numérico (hecho por filas) de la tabla 7.

Todas las columnas e tienden a cero, luego el polinomio tiene cuatro ceros cuyos valores absolutos son distintos. Las columnas q convergen a los ceros, cuyos valores exactos son: $z_1 = 0.96194$, $z_2 = 0.69134$, $z_3 = 0.30866$ y $z_4 = 0.038060$.

Tabla 6

	$-\frac{a_1}{a_0}$		0		0		0
0		$\frac{a_2}{a_1}$		$\frac{a_3}{a_2}$		$\frac{a_4}{a_3}$	
	$q_1^{(1)}$		$q_0^{(2)}$		$q_{-1}^{(3)}$		$q_{-2}^{(4)}$
0		$e_1^{(1)}$		$e_0^{(2)}$		$e_{-1}^{(3)}$	
	$q_2^{(1)}$		$q_1^{(2)}$		$q_0^{(3)}$		$q_{-1}^{(4)}$
0		$e_2^{(1)}$		$e_1^{(2)}$		$e_0^{(3)}$	
	$q_3^{(1)}$		$q_2^{(2)}$		$q_1^{(3)}$		$q_0^{(4)}$
0		$e_3^{(1)}$		$e_2^{(2)}$		$e_1^{(3)}$	
	$q_4^{(1)}$		$q_3^{(2)}$		$q_2^{(3)}$		$q_1^{(4)}$
0		$e_4^{(1)}$		$e_3^{(2)}$		$e_2^{(3)}$	
$\vdots$	$q_5^{(1)}$	$\vdots$	$q_4^{(2)}$	$\vdots$	$q_3^{(3)}$	$\vdots$	$q_2^{(4)}$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Tabla 7

$q_n^{(1)}$	$e_n^{(1)}$	$q_n^{(2)}$	$e_n^{(2)}$	$q_n^{(3)}$	$e_n^{(3)}$	$q_n^{(4)}$
2.000000		0.000000		0.000000		0.000000
	−0.625000		−0.200000		−0.031250	
1.375000		0.425000		0.168750		0.031250
	−0.193182		−0.079412		−0.005787	
1.181818		0.538770		0.242375		0.037037
	−0.088068		−0.035725		−0.000884	
1.093750		0.591114		0.277215		0.037921
	−0.047596		−0.016754		−0.000121	
1.046154		0.621956		0.293848		0.038042
	−0.028297		−0.007915		−0.000016	
1.017857		0.642337		0.301748		0.038058
	−0.017857		−0.003718		−0.000002	
1.000000		0.656476		0.305464		0.038060
	−0.011723		−0.001730		−0.000000	
0.988277		0.666468		0.307194		0.038060
	−0.007906		−0.000789		−0.000000	
0.980372		0.673576		0.307992		0.038060
	−0.005432		−0.000365		−0.000000	
0.974940		0.678643		0.308356		0.038060
	−0.003781		−0.000166		−0.000000	

Ejemplo 17.

Para el polinomio

$$P(x) = x^4 - 8\ x^3 + 39\ x^2 - 62\ x + 50\ ,$$

obtenemos el esquema QD numérico (hecho por filas) de la tabla 8.

Tenemos ahora que $e_n^{(2)} \to 0$, pero $e_n^{(1)}$ y $e_n^{(3)}$ no tienden a cero. Esto es una indicación de que hay dos pares de ceros complejo conjugados. Formemos entonces las cantidades

$$A_n^{(k)} = q_{n+1}^{(k+1)} + q_n^{(k+2)} \ , \qquad B_k = q_{n+1}^{(k+1)} \cdot q_n^{(k+2)}$$

para $k = 0$ y $k = 2$, obteniendo los valores de la tabla 9. Los límites son 6, 25, 2 y 2 respectivamente, indicando que los polinomios

$$x^2 - 6\ x + 25 \quad \text{y} \quad x^2 - 2\ x + 2$$

son factores cuadráticos del polinomio dado. En realidad,

$$x^4 - 8\ x^3 + 39\ x^2 - 62\ x + 50 = (x^2 - 6\ x + 25)\ (x^2 - 2\ x + 2)\ .$$

Tabla 8

$q_n^{(1)}$	$e_n^{(1)}$	$q_n^{(2)}$	$e_n^{(2)}$	$q_n^{(3)}$	$e_n^{(3)}$	$q_n^{(4)}$
8.000000		0.000000		0.000000		0.000000
	−4.875000		−1.589744		−0.806452	
3.125000		3.285256		0.783292		0.806452
	−5.125000		−0.379037		−0.830296	
−2.000000		8.031220		0.332033		1.636748
	20.580000		−0.015670		−4.092923	
18.580000		−12.564451		−3.745220		5.729671
	−13.916921		−0.004671		6.261609	
4.663079		1.347799		2.521060		−0.531938
	−4.022497		−0.008737		−1.321186	
0.640581		5.361559		1.208612		0.789248
	−33.667611		−0.001970		−0.862761	
−33.027030		39.027201		0.347820		1.652009

Tabla 9

$A_n^{(0)}$	$B_n^{(0)}$	$A_n^{(2)}$	$B_n^{(2)}$
6.410256	26.282051	1.589744	0.000000
6.031220	25.097561	1.968780	1.282051
6.015549	25.128902	1.984451	1.902439
6.010878	25.042114	1.989122	1.992225
6.002141	25.001372	1.997859	1.989741
6.000171	25.000110	1.999829	1.996637

Finalmente, consideramos la complicación que surge si algunos de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_N$ es igual a cero. En este caso, el esquema QD extendido definido por el último algoritmo dado es claro que no existe, ya que algunas de las relaciones $(XII.68)$ y $(XII.69)$ dejan de tener sentido. Un remedio posible consiste en introducir una nueva variable $\tilde{x} = x - a$ y considerar el polinomio

$$\tilde{P}(\tilde{x}) = P(a + \tilde{x}) = p(a) + \frac{1}{1!}\ P'(a)\ \tilde{x} + \frac{1}{2!}\ P''(a)\ \tilde{x}^2 + \ldots + \frac{1}{N!}\ P^{(N)}(a)\ \tilde{x}^N\ .$$

Aquí a denota un parámetro adecuadamente escogido. Se puede provar que si P tiene algunos coeficientes iguales a cero, entonces todos los coeficientes de $\tilde{P}$ son distintos de cero para valores suficientemente pequeños de $a \neq 0$. Si los ceros $\tilde{z}_k$ de $\tilde{P}$ han sido calculados, los de P vienen dados por la fórmula $z_k = \tilde{z}_k + a$.

Ejemplo 18.

Sea el polinomio

$$P(x) = 81\ x^4 - 108\ x^3 + 24\ x + 20\ .$$

Aquí $a_2 = 0$, y no podemos usar las fórmulas $(XII.68)$ y $(XII.69)$. Formemos, entonces, $\tilde{P}$ con $a = 1$. El nuevo polinomio será

$$\tilde{P}(\tilde{x}) = 81\ \tilde{x}^4 + 216\ \tilde{x}^3 + 162\ \tilde{x}^2 + 24\ \tilde{x} + 17\ ,$$

y este tiene todos los coeficientes distintos de ceros.

Las primeras dos filas de su esquema QD son las siguientes:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & -\dfrac{216}{81} & & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & & \dfrac{162}{216} & & \dfrac{24}{162} & & \dfrac{17}{24} &
\end{array}$$

EJERCICIOS.

1. Encontrar aproximaciones exactas en 10^{-5} de todos los ceros reales de los siguientes polinomios , usando el método de Newton y deflación. Encontrar primero los ceros reales y luego reducir a polinomios de grado menor para determinar los eventuales ceros complejos.

a) $P(x) = x^3 - 2\ x^2 - 5$; *b*) $P(x) = x^3 + 3\ x^2 - 1$;
c) $P(x) = x^3 - x - 1$; *d*) $P(x) = x^4 + 2\ x^2 - x - 3$;
e) $P(x) = x^4 + 5\ x^3 - 9\ x^2 - 85\ x - 136$;
f) $P(x) = x^4 - 2\ x^3 - 12\ x^2 + 16\ x - 40$;
g) $P(x) = x^4 + x^3 + 3\ x^2 + 2\ x + 2$;
h) $P(x) = x^5 + 11\ x^4 - 21\ x^3 - 10\ x^2 - 21\ x - 5$;
i) $P(x) = 16\ x^4 + 88\ x^3 + 159\ x^2 + 76\ x - 240$;
l) $P(x) = x^4 - 4\ x^2 - 3\ x + 5$.

2. Para los siguientes polinomio de orden cuatro, (i) usar el método de Horner para mostrar que z_0 es una raíz de $P(x)$, y encontrar el polinomio $Q_0(x)$ tal que $P(x) = (x - z_0)\ Q_0(x)$; (ii) mostrar que $Q_0(z_1) = 0$ y encontrar $Q_1(x)$ tal que $Q_0(x) = (x-z_1)\ Q_1(x)$; (iii) dado que $P(x) = (x-z_0)\ (x-z_1)\ Q_1(x)$, usar la fórmula cuadrática para encontrar las otras dos raíces; (iv) empezar con p_0 y usar el método de Newton para encontrar p_1 y p_2.

a) $P(x) = x^4 + x^3 - 13\ x^2 - x + 12,\ z_0 = 3,\ z_1 = -1,\ p_0 = 1.1$;
b) $P(x) = x^4 + x^3 - 21\ x^2 - x + 20,\ z_0 = 4,\ z_1 = -1,\ p_0 = 1.1$;
c) $P(x) = x^4 - 2\ x^3 - 7\ x^2 + 8\ x + 12,\ z_0 = 3,\ z_1 = 2,\ p_0 = 2.1$;
d) $P(x) = x^4 - 4\ x^3 - 3\ x^2 + 14\ x - 8,\ z_0 = -2,\ z_1 = 4,\ p_0 = 1.1$;
e) $P(x) = x^4 - 6\ x^3 + 9\ x^2 + 4\ x - 12,\ z_0 = 2,\ z_1 = -1,\ p_0 = 2.1$;
f) $P(x) = x^4 - 5\ x^3 + 6\ x^2 + 4\ x - 8,\ z_0 = -1,\ z_1 = 2,\ p_0 = 2.1$.

3. Para los polinomio del problema anterior, usar el método de Bairstow para encontrar el factor cuadrático $(x^2 - r\ x - s)$ de $P(x)$, con r_0 y s_0 dados por:

a) $r_0 = 1.5,\quad s_0 = 2.5$; *b*) $r_0 = 2.5,\quad s_0 = 3.5$;
c) $r_0 = 4.5,\quad s_0 = -5.5$; *d*) $r_0 = 1.5,\quad s_0 = 7.5$;
e) $r_0 = 0.5,\quad s_0 = 1.5$; *f*) $r_0 = 0.5,\quad s_0 = 1.5$.

4. Para los siguientes polinomio, encontrar por el método de Bernoulli el cero dominante con tres cifras significativas. Intentar acelerar la convergencia con el proceso Δ^2 de Aitken. Luego mejorar la aproximación con el método de Newton y usando el algoritmo de Horner.

a) $P(x) = 32\ x^3 - 48\ x^2 + 18\ x - 1$; *b*) $P(x) = x^3 - x^2 + 2$;
c) $P(x) = x^4 - 7\ x^3 + 13\ x^2 - 8\ x + 12$.

5. Genérese los esquemas QD construidos por columnas y por filas para los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 5\ x^2 + 9\ x - 5$; *b*) $P(x) = 32\ x^3 - 48\ x^2 + 18\ x - 1$;
c) $P(x) = 81\ x^4 - 108\ x^3 + 24\ x + 20$;
d) $P(x) = 70\ x^4 - 140\ x^3 + 90\ x^2 - 20\ x + 1$;
e) $P(x) = x^5 - 3\ x^4 - 20\ x^3 + 60\ x^2 - x - 78$.