CAPITULO XI. METODOS DE INTERPOLACION

1. EL METODO DE INTERPOLACION DE LA POSICION FALSA

Los métodos de interpolación que vamos a discutir en el resto de este capítulo son muy útiles para determinar los ceros de una función real $f(x)$ cualquiera. A diferencia del método de Newton, en los métodos de interpolación que veremos no se necesita calcular la derivada de f, y además convergen más rapidamente.

El método de interpolación más simple es el conocido como **regula falsi** o método de **la falsa posición**. Es muy parecido al método de bisección en el cual dos números p_n y a_n se obtienen en cada paso de forma que $f(p_n) \cdot f(a_n) < 0$. El intervalo $[p_n, a_n]$ contiene entonces al menos un cero de $f(x)$, y los valores p_n vienen determinados en manera que converjan hacia uno de estos ceros.

En el método de interpolación de la posición falsa, para definir los valores p_{n+1}, a_{n+1}, se considera μ_n el cero de la función interpolante lineal:

$$P(x) = f(p_n) + (x - p_n)\ \frac{f(p_n) - f(a_n)}{p_n - a_n}$$

donde $P(p_n) = f(p_n)$ y $P(a_n) = f(a_n)$, es decir

$$\mu_n = p_n - f(p_n)\ \frac{p_n - a_n}{f(p_n) - f(a_n)} = \frac{a_n\ f(p_n) - p_n\ f(a_n)}{f(p_n) - f(a_n)}\ . \qquad (XI.1a)$$

Por el hecho de que $f(p_n) \cdot f(a_n) < 0$, tenemos que $f(p_n) - f(a_n) \neq 0$; entonces μ_n está siempre bien definido y satisface ó $p_n < \mu_n < a_n$ ó $a_n < \mu_n < p_n$. A menos que $f(\mu_n) = 0$, definimos:

$$\begin{cases} p_{n+1} = \mu_n \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n, \quad \text{si} \quad f(\mu_n) \cdot f(p_n) > 0, \\ p_{n+1} = \mu_n \quad \text{y} \quad a_{n+1} = p_n, \quad \text{si} \quad f(\mu_n) \cdot f(p_n) < 0. \end{cases} \qquad (XI.1b, c)$$

El algoritmo termina si $f(\mu_n) = 0$, es decir si μ_n es el cero.

Para discutir la convergencia del método de la falsa posición, asumiremos por simplicidad que f'' existe y que para algun valor i:

$$p_i < a_i, \qquad (XI.2a)$$

$$f(p_i) < 0, \qquad f(a_i) > 0, \qquad (XI.2b)$$

$$f''(x) \geq 0, \qquad \forall\ x \in [p_i, a_i], \qquad (XI.2c)$$

Con estas hipótesis ó $f(\mu_i) = 0$ ó

$$f(\mu_i) \cdot f(p_i) > 0$$

y entonces $p_i < p_{i+1} = \mu_i < a_{i+1} = a_i$ (ver figuras 1 y 2).

Es ahora fácil ver que las fórmulas $(XI.2)$ son válidas para todo $i \geq i_0$ si son válidas para un i_0. Entonces, $a_i = a$ para $i \geq i_0$, y las p_i forman una secuencia monótona acotada creciente, y el límite $\lim_{i\to\infty} p_i = \overline{p}$ existe. Por el hecho de que f es continua, y por $(XI.2)$ se sigue que

$$f(a) > 0, \qquad f(\overline{p}) \leq 0 \ .$$

Además, pasando al límite en $(XI.1)$

$$\overline{p} = \frac{a\ f(\overline{p}) - \overline{p}\ f(a)}{f(\overline{p}) - f(a)}$$

que implica

$$(\overline{p} - a)\ f(\overline{p}) = 0 \ .$$

Pero $\overline{p} \neq a$, y entonces $f(\overline{p}) = 0$.

Figura 1

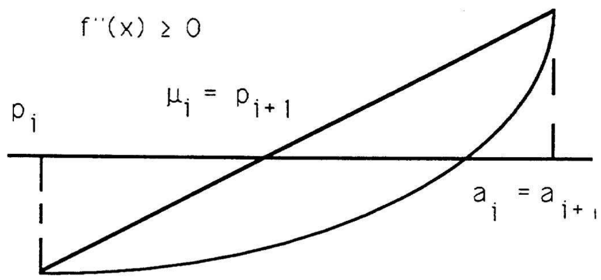
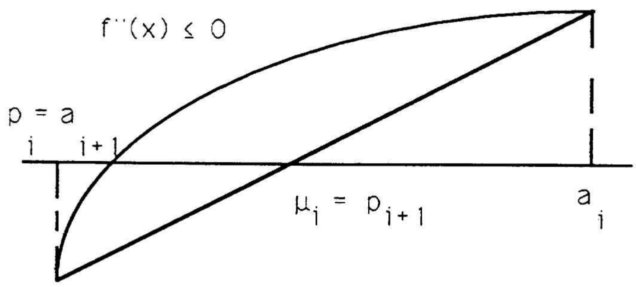


Figura 2



Está claro que bajo las hipótesis $(XI.2)$, la regula falsi, usará sólo las primeras dos fórmulas de recursión $(XI.1b)$. Nótese que este caso se reduce al método de la secante presentado en el Capítulo XVII, en el cual el extremo fijo es aquél para el cual el signo de la función $f(x)$ coincide con el signo de su segunda derivada $f''(x)$.

La variación del método de la falsa posición, basada exclusivamente en la segundas dos fórmulas de recursión $(XI.1c)$

$$p_{n+1} = \frac{p_{n-1}\ f(p_n) - p_n\ f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

no es nada más que el método de la secante modificado que hemos encontrado en el Capítulo IX.

Ejemplo 1.

Consideramos el polinomio $P(x) = -x^3 + 6\ x^2 + 4\ x - 24$. En el intervalo $[0, 3]$, donde hay un cero, no se puede usar el método de la secante, pero si el de la secante modificada y el de la regula falsi. Los resultados están resumidos en la siguientes tablas, respectivamente.

$p_0 = 3.0$	$f(p_0) = 15.0$	$p_1 = 0.0$	$f(p_1) = -24.0$
i	p_i		$f(p_i)$
2	1.846153846		-2.457897135
3	2.056795132		0.90853891
4	1.99994694		-8.4896×10^{-4}
5	2.0000000011		1.76×10^{-7}
6	2.0		0.0

$p_1 = 0$	$f(p_1) = -24.0$	$a_1 = 3.0$	$f(a_1) = 15.0$
i	μ_i		$f(\mu_i)$
1	1.846153846		-2.457897135
2	2.008603833		0.137660691
3	1.999987967		-1.92528×10^{-4}
4	2.0		0.0

2. EL METODO DE INTERPOLACION DE MÜLLER

Estudiaremos ahora un método presentado por primera vez por D.E. Müller en 1956. Esta técnica puede ser usada en cualquier problema de búsqueda de raíces, pero es particularmente útil para aproximar raíces de polinomios.

El método de Müller es una generalización del método de la secante. El método de la secante modificado empieza con dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 y determina la siguiente aproximación x_2 como la intersección del eje x con la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. El método de Müller usa tres aproximaciones iniciales x_0, x_1 y x_2 y determina la siguiente aproximación x_3 considerando la intersección del eje x con la parábola que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

La derivación del procedimiento de Müller comienza considerando el polinomio cuadrático

$$P(x) = a\ (x - x_2)^2 + b\ (x - x_2) + c$$

que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Las constantes a, b y c pueden determinarse de las condiciones

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P(x_0) = a\ (x_0 - x_2)^2 + b\ (x_0 - x_2) + c\ , \\ f(x_1) &= P(x_1) = a\ (x_1 - x_2)^2 + b\ (x_1 - x_2) + c\ , \\ f(x_2) &= P(x_2) = c\ ; \end{aligned}$$

las cuales nos dan

$$\begin{aligned} c &= f(x_2)\ , \\ b &= \frac{(x_0 - x_2)^2\ [f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2\ [f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)\ (x_1 - x_2)\ (x_0 - x_1)}\ , \\ a &= \frac{(x_1 - x_2)\ [f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)\ [f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)\ (x_1 - x_2)\ (x_0 - x_1)}\ . \end{aligned} \tag{XI.3}$$

Para determinar x_3, la raíz de P, aplicamos la fórmula cuadrática a P. Debido a problemas del error de redondeo causados por la subtracción de números casi iguales, se aplica la fórmula

$$x_3 - x_2 = \frac{-2\ c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}\ .$$

Esto da dos posibilidades para x_3 dependiendo del signo que precede al término bajo radical. En el método de Müller, el signo se elije para que coincida con el de b. Escogido de esta manera, el denominador será el más grande en magnitud y resultará en seleccionar a x_3 como la raíz de P más cercana a x_2. Así,

$$x_3 = x_2 - \frac{2\ c}{b + signo(b)\sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}$$

donde a, b y c están dadas en $(XI.3)$. Una vez que se determina x_3, el procedimiento se reinicializa usando x_1, x_2 y x_3 en lugar de x_0, x_1 y x_2 para determinar la siguiente aproximación x_4. El método continúa hasta que se obtiene una conclusión satisfactoria. Ya que el método involucra en cada paso el radical $\sqrt{b^2 - 4\ a\ c}$, el método aproximará raíces complejas cuando sea apropiado.

Algoritmo de Müller.

==

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dadas tres aproximaciones x_0, x_1 y x_2:

Entrada: aproximaciones iniciales x_0, x_1 y x_2; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada de p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar
$h_1 = x_1 - x_0$; $h_2 = x_2 - x_1$;
$\delta_1 = [f(x_1) - f(x_0)]/h_1$; $\delta_2 = [f(x_2) - f(x_1)]/h_2$;
$a = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$;
$i = 2$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–7;

Paso 3: tomar:
$b = \delta_2 + h_2\ a$;
$D = \sqrt{b^2 - 4\ f(x_2)a}$;

Paso 4: si $|b-D| < |b+D|$ entonces tomar $E = b+D$, si no tomar $E = b-D$;

Paso 5: tomar:
$h = -2\ f(x_2)/E$;
$p = x_2 + h$;

Paso 6: si $|h| < TOL$ entonces SALIDA (p); *(procedimiento completado satisactoriamente)* PARAR;

Paso 7: tomar (*preparar para la siguiente iteración*):
$x_0 = x_1$; $x_1 = x_2$; $x_2 = p$;
$h_1 = x_1 - x_0$; $h_2 = x_2 - x_1$;
$\delta_1 = [f(x_1) - f(x_0)]/h_1$; $\delta_2 = [f(x_2) - f(x_1)]/h_2$;
$a = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$;
$i = i + 1$;

Paso 8: SALIDA ('*El método fracasó después de* N_0 *iteraciones,* $N_0 =$ ', N_0); *(procedimiento completado sin éxito)*; PARAR.

==

Ejemplo 2.

Consideramos el polinomio $P(x) = 16\ x^4 - 40\ x^3 + 5\ x^2 + 20\ x + 6$. Usando el algoritmo de Müller con $TOL = 10^{-5}$ y diferentes valores de x_0, x_1 y x_2, tenemos los resultados que se muestran el la tabla siguente. Los valores reales de las raíces de la ecuación son 1.241677445, 1.970446079 y $-0.356062 \pm 0.162758\ i$, lo que demuestra que las aproximaciones del método de Müller son excelentes.

$x_0 = 0.5$	$x_1 = -0.5$	$x_2 = 0.0$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	$-0.555556 + 0.598352\ i$		$-29.4007 - 3.89872\ i$
4	$-0.435450 + 0.102101\ i$		$1.33223 - 1.19309\ i$
5	$-0.390631 + 0.141852\ i$		$0.375057 - 0.670164\ i$
6	$-0.357699 + 0.169926\ i$		$-0.146746 - 0.00744629\ i$
7	$-0.356051 + 0.162856\ i$		$-0.183868 \times 10^{-2} + 0.539780 \times 10^{-3}\ i$
8	$-0.356062 + 0.162758\ i$		$0.286102 \times 10^{-2} + 0.953674 \times 10^{-6}\ i$

$x_0 = 0.5$	$x_1 = 1.0$	$x_2 = 1.5$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	1.287855		-1.376275
4	1.237459		1.269422×10^{-1}
5	1.241604		2.194520×10^{-3}
6	1.241677		1.321123×10^{-6}
7	1.241677		1.321123×10^{-6}

$x_0 = 2.5$	$x_1 = 2.0$	$x_2 = 2.25$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	1.960592		-6.113129×10^{-1}
4	1.970564		7.456961×10^{-3}
5	1.970447		3.133506×10^{-5}
6	1.970447		2.720395×10^{-6}

El ejemplo 2 ilustra que el método de Müller puede aproximar las raíces del polinomio con una variedad de valores iniciales. De hecho, la importancia del método de Müller reside en que esta técnica generalmente convergerá a la raíz del polinomio para cualquier elección de las aproximaciones iniciales. Se pueden construir problemas en los que no habrá convergencia para ciertas aproximaciones iniciales. Por ejemplo, si x_i, x_{i+1} y x_{i+2} para alguna i tienen la propiedad de que $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$, la ecuación cuadrática se reducirá a una función constante no cero y nunca cuzará al eje x; sin embargo, éste no es usualmente el caso.

El método de Müller no es tan eficiente como el método de Newton: su orden de convergencia cerca de una raíz es aproximadamente $\alpha = 1.84$ comparado con el cuadrático, $\alpha = 2$, del método de Newton, pero es mejor que el método de la secante, cuyo orden es aproximadamente $\alpha = 1.62$.

EJERCICIOS.

1. En 1225 Leonardo de Pisa estudió la ecuación

$$f(x) = x^3 + 2\ x^2 + 10\ x - 20 = 0$$

y encontró $x \approx 1.368808107$. Nadie sabe que método usó Leonardo. Usar el método de la regula falsi para reencontrar este resultado.

2. Encontrar aproximaciones exactas en 10^{-4} de todos los ceros reales de las siguientes funciones usando el método de regula falsi.

a) $f(x) = x - e^{-x}$,

b) $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

3. Encontrar aproximaciones exactas en 10^{-4} de todos los ceros reales de los siguientes polinomios usando el método de Müller.

a) $P(x) = x^3 - 2\ x^2 - 5$, *b)* $P(x) = x^3 + 3\ x^2 - 1$,

c) $P(x) = x^3 - x - 1$, *d)* $P(x) = x^4 + 2\ x^2 - x - 3$.

4. Encontrar aproximaciones exactas en 10^{-5} de todos los ceros reales de los siguientes polinomios usando el método de Müller.

a) $P(x) = x^4 + 5\ x^3 - 9\ x^2 - 85\ x - 136$,

b) $P(x) = x^4 - 2\ x^3 - 12\ x^2 + 16\ x - 40$,

c) $P(x) = x^4 + x^3 + 3\ x^2 + 2\ x + 2$,

d) $P(x) = x^5 + 11\ x^4 - 21\ x^3 - 10\ x^2 - 21\ x - 5$,

e) $P(x) = 16\ x^4 + 88\ x^3 + 159\ x^2 + 76\ x - 240$,

f) $P(x) = x^4 - 4\ x^2 - 3\ x + 5$,

g) $P(x) = x^4 - 2\ x^3 - 4\ x^2 + 4\ x + 4$,

h) $P(x) = x^3 - 7\ x^2 + 14\ x - 6$,