CAPITULO X. ANALISIS DE ERROR Y TECNICAS DE ACELERACION

1. ANALISIS DE LOS ERRORES PARA METODOS ITERATIVOS

Este capítulo se dedica a investigar el orden de convergencia de los esquemas de iteración funcional y, con la idea de obtener una convergencia rápida, reutilizar el método de Newton. Consideraremos también maneras de acelerar la convergencia del método de Newton en circunstancias especiales. Pero, antes, tenemos que definir un procedimiento para medir la rapidez de la convergencia.

Definición

Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p y que $e_n = p_n - p$ para cada $n \geq 0$. Si existen dos números positivos λ y α tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda \ ,$$

entonces se dice que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ **converge a** p **de orden** α, con una constante de error asintótico λ.

A una técnica iterativa para resolver un problema de la forma $x = g(x)$ se le denomina de orden α si, siempre que el método produce convergencia para una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$, la sucesión converge a la solución de orden α.

En general, una sucesión con un orden de convergencia grande convergerá más rápidamente que una sucesión con un orden más bajo. La constante asintótica afectará la rapidez de convergencia, pero no es tan importante como el orden. Se dará atención especial a dos casos:

i) si $\alpha = 1$, entonces el método se denomina **lineal**;
ii) si $\alpha = 2$, entonces el método se denomina **cuadrático**.

Ejemplo 1.

Supongamos que queremos encontrar una solución aproximada de $g(x) = x$, usando el esquema de iteración de punto fijo $p_n = g(p_{n-1})$ para toda $n \geq 1$. Supongamos también que g manda el intervalo $[a, b]$ a sí mismo y que existe un número positivo k tal que $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a, b]$. El Teorema VII.2 implica que g tiene un punto fijo único $p \in [a, b]$ y que si $p_0 \in [a, b]$ entonces la sucesión de punto fijo $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p. Se mostrará que la convergencia es lineal, siempre que $g'(p) \neq 0$. Si n es cualquier entero positivo, entonces

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)\ (p_n - p) = g'(\xi_n)\ e_n \ ,$$

donde ξ_n está entre p_n y p. Como $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p, $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ también converge a p. Suponiendo que g' es continua en $[a, b]$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p) \ ,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p) \ , \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(p)| \ .$$

Por lo tanto, la iteración del punto fijo exhibe convergencia lineal si $g'(p) \neq 0$. La convergencia de orden mayor puede ocurrir sólo cuando $g'(p) = 0$.

Ejemplo 2.

Supongamos que tenemos dos esquemas iterativos convergentes descritos por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0.75 \ , \qquad \text{un método lineal,}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{e}_{n+1}|}{|\tilde{e}_n|^2} = 0.75 \ , \qquad \text{un método cuadrático.}$$

Supongamos también, por simplicidad, que

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 0.75 \qquad \text{y} \qquad \frac{|\tilde{e}_{n+1}|}{|\tilde{e}_n|^2} \approx 0.75 \ .$$

Para el esquema de convergencia lineal, esto significa que

$$|e_n| \approx 0.75 \ |e_{n-1}| \approx (0.75)^2 \ |e_{n-2}| \approx \ldots \approx (0.75)^n \ |e_0| \ ,$$

mientras que el procedimiento convergente cuadráticamente tiene

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_n| &\approx 0.75 \ |\tilde{e}_{n-1}|^2 \approx (0.75) \ [(0.75) \ |\tilde{e}_{n-2}|^2]^2 = (0.75)^3 \ |\tilde{e}_{n-2}|^4 \\ &\approx (0.75)^3 \ [(0.75) \ |\tilde{e}_{n-3}|^2]^4 = (0.75)^7 \ |\tilde{e}_{n-3}|^8 \approx \ldots \approx (0.75)^{2^n-1} \ |\tilde{e}_0|^{2^n} \ . \end{aligned}$$

Para comparar la rapidez de convergencia supondremos que $|e_0| = |\tilde{e}_0| = 0.5$ y usaremos las estimaciones para determinar el valor mínimo de n necesario para obtener un error que no exceda de 10^{-8}. Para el método lineal, esto implica que n debe ser tal que

$$|e_n| = (0.75)^n \ |e_0| \leq 10^{-8} \ ,$$

esto es

$$n \geq \frac{\log_{10} 2 - 8}{\log_{10} 0.75} \approx 62 \ .$$

Para el método de convergencia cuadrática

$$|\tilde{e}_n| = (0.75)^{2^n-1} \ |\tilde{e}_0|^{2^n} = (0.75)^{-1} \ (0.375)^{2^n} \leq 10^{-8} \ ,$$

implica que

$$2^n \log_{10} 0.375 \leq \log_{10} 0.75 - 8 \ ,$$

y por lo tanto,

$$2^n \geq \frac{\log_{10} 0.75 - 8}{\log_{10} 0.375} \approx 19.1 \ ,$$

así que

$$n \geq 5 \ .$$

En estas circunstancias, el método convergente cuadráticamente, requiriendo sólo 5 iteraciones es muy superior al lineal requiriendo 62.

2. TECNICAS DE ACELERACION Y FORMULA DE NEWTON GENERALIZADA

Vamos ahora a determinar y caracterizar esquemas de iteración funcional cuadrática.

Teorema X.1

Sea p una solución de $x = g(x)$. Supongamos que $g'(p) = 0$ y g'' es continua en un intervalo abierto que contiene a p. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que, para $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para toda $n \geq 1$, es convergente cuadráticamente.

Demostración: escogeremos $\delta > 0$ tal que en el intervalo $[p-\delta, p+\delta]$, $|g'(x)| \leq k < 1$ y g'' sea continua. Como $|g'(x)| \leq k < 1$ se sigue que los términos de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ están contenidos en $[p-\delta, p+\delta]$. Desarrollando $g(x)$ en un polinomio de Taylor lineal para $x \in [p-\delta, p+\delta]$ resulta

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{g''(\xi)}{2} \ (x-p)^2 \ ,$$

donde ξ está entre x y p. Usando las hipótesis $g(p) = p$ y $g'(p) = 0$, tenemos que:

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2} \ (x-p)^2 \ .$$

En particular, cuando $x = p_n$ para algún n,

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2} \ (p_n - p)^2$$

con ξ_n entre p_n y p. Por lo tanto,

$$p_{n+1} - p = e_{n+1} = \frac{g''(\xi_n)}{2} \ e_n^2 \ .$$

Como $|g'(x)| \leq k < 1$ en $[p-\delta, p+\delta]$, y g manda $[p-\delta, p+\delta]$ a sí mismo, del Teorema VII.2 tenemos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p. Como ξ_n está entre p y p_n para cada n, $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge también a p, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(p)|}{2} \ .$$

Esto implica que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge cuadráticamente. **c.q.d.**

Para usar el Teorema X.1 para resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución p tal que $f'(p) \neq 0$. Consideremos el esquema de punto fijo

$$p_n = g(p_{n-1}) \ , \qquad n \geq 1 \ ,$$

con g de la forma

$$g(x) = x - \phi(x)\ f(x)\ ,$$

donde ϕ es una función arbitraria que se escogerá más adelante.

Si $\phi(x)$ está acotada, entonces $g(p) = p$, y, para que el procedimiento iterativo derivado de g sea cuadráticamente convergente, es suficiente que $g'(p) = 0$. Pero

$$g'(x) = 1 - \phi'(x)\ f(x) - \phi(x)\ f'(x) \quad \text{y} \quad g'(p) = 1 - \phi(p)\ f'(p)\ .$$

Consecuentemente, $g'(p) = 0$ si y sólo si $\phi(p) = \dfrac{1}{f'(p)}$.

En particular, se obtendrá convergencia cuadrática para el esquema

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\ ,$$

el cual puede reconocerse como el método de Newton.

En la discusión anterior, se impuso la restricción de que $f'(p) \neq 0$, donde p es la solución de $f(x) = 0$. De la definición del método de Newton, es claro que pueden presentarse dificultades si $f'(p_n)$ tiende a cero simultáneamente con $f(p_n)$. En particular, este método y el método de la secante traerán generalmente problemas si $f'(p) = 0$ cuando $f(p) = 0$. Para examinar estas dificultades con más detalle haremos la siguiente definición.

Definición

Se dice que una solución p de $f(x) = 0$ es un **cero de multiplicidad** m de f si $f(x)$ puede escribirse como $f(x) = (x - p)^m\ q(x)$, para $x \neq p$, donde $\lim\limits_{x\to p} q(x) \neq 0$.

Esencialmente $q(x)$ representa la porción de $f(x)$ que no contribuye al cero de f. El siguiente resultado da una manera fácil de identificar a los ceros de las funciones que tienen multiplicidad uno. A estos ceros se les llama **simples**.

Teorema X.2

Una función $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ tiene un cero simple en p en (a,b) si y sólo si $f(p) = 0$, pero $f'(p) \neq 0$.

El resultado del Teorema X.2 implica que existe un intervalo alrededor de p en el cual el método de Newton converge cuadráticamente a p para cualquier aproximación inicial, siempre y cuando p sea una raíz simple. El ejemplo siguiente muestra que no necesariamente hay convergencia cuadrática si la raíz no es simple.

Ejemplo 3.

La función descrita por $f(x) = e^x - x - 1$ tiene una raíz de multiplicidad dos en $p = 0$.

Para demostrar esto, consideremos la función

$$q(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}\ .$$

Usando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0\ .$$

Por lo tanto,

$$f(x) = (x-0)^2 \frac{e^x - x - 1}{x^2}\ ,$$

donde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \neq 0$, y la multiplicidad de la raíz en $p = 0$ es dos.

Los términos generados por el método de Newton aplicado a f con $p_0 = 1$ se muestran en la tabla siguiente. Está claro que la sucesión no converge cuadráticamente a cero.

Tabla 1

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9424×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4716×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7358×10^{-4}
5	0.04380	14	8.6773×10^{-5}
6	0.02206	15	4.3329×10^{-5}
7	0.01107	16	2.1635×10^{-5}
8	0.005545		

Una manera de *atacar* el problema de raíces múltiples consiste en definir una función $\mu(x)$ por

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\ .$$

Si p es una raíz de multiplicidad $m \geq 1$, y $f(x) = (x-p)^m\ q(x)$, entonces

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m\ q(x)}{m\ (x-p)^{m-1}\ q(x) + (x-p)^m\ q'(x)} = \frac{(x-p)\ q(x)}{m\ q(x) + (x-p)\ q'(x)}$$

tendrá también una raíz en p, pero de multiplicidad uno. El método de Newton puede entonces aplicarse a la función μ para dar

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - f(x)\ f''(x)\}/[f'(x)]^2}$$

o

$$g(x) = x - \frac{f(x)\ f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)\ f''(x)}\ . \qquad (X.1)$$

La fórmula $(X.1)$ se conoce como **fórmula de Newton generalizada** para raíces múltiples.

Si g cumple con las condiciones de continuidad requeridas, la iteración funcional aplicada a g tendrá convergencia cuadrática independientemente de la multiplicidad de la raíz. Teóricamente, las únicas desventajas de este método son los cálculos adicionales de

$f''(x)$ y el hecho de que el procedimiento es más laborioso para calcular las iteraciones. En la práctica, sin embargo, la presencia de una raíz múltiple puede causar serios problemas de redondeo.

Ejemplo 4.

En el ejemplo 3 del capítulo XVI resolvimos $f(x) = x^3 + 4\ x^2 - 10 = 0$ para la raíz $p = 1.365230013$. Para comparar la convergencia del método de Newton y el método de Newton generalizado, ecuación $(X.1)$, para una raíz de multiplicidad uno, sea (i):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4\ p_{n-1}^2 - 10}{3\ p_{n-1}^2 + 8\ p_{n-1}}\ , \qquad \text{del método de Newton}$$

y, de la ecuación $(X.1)$, (ii):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4\ p_{n-1}^2 - 10)\ (3\ p_{n-1}^2 + 8\ p_{n-1})}{(3\ p_{n-1}^2 + 8\ p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4\ p_{n-1}^2 - 10)\ (6\ p_{n-1} + 8)}\ .$$

Con $p_0 = 1.5$, las primeras iteraciones para (i) y (ii) son las siguientes.

Tabla 2

	(i)	(ii)
p_1	1.373333333	1.356898976
p_2	1.365262015	1.365195849
p_3	1.365230014	1.365230013
p_4	1.365230013	1.365230013

Ejemplo 5.

Para ilustrar la situación que se presenta en una raíz múltiple, consideremos la ecuación $f(x) = x^4 - 4\ x^2 + 4 = 0$, que tiene una raíz de multiplicidad dos en $x = \sqrt{2} = 1.414213562$. Usar el método de Newton y la versión modificada $(X.1)$ produce, después de algunas simplificaciones, las sucesiones con términos (i):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2 - 2}{4\ p_{n-1}}\ , \qquad \text{del método de Newton}$$

y, (ii):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^2 - 2)\ p_{n-1}}{(p_{n-1}^2 + 2)}\ , \qquad \text{de la ecuación (X.1).}$$

Con $p_0 = 1.5$, las tres primeras iteraciones para (i) y (ii) nos dan lo siguiente:

Tabla 3

	(i)	(ii)
p_1	1.458333333	1.411764706
p_2	1.436607143	1.414211438
p_3	1.425497619	1.414213562

La solución real correcta en 10^{-9} es la que aparece para p_3 en (ii). Para obtener esta precisión con el método normal de Newton-Raphson se requerirían 20 iteraciones.

Ejemplo 6.

Consideremos la ecuación $f(x) = x^3 - 5\ x^2 + 3\ x + 9 = 0$, que tiene una raíz de multiplicidad dos en $x = 3.0$, dado que $f(x) = x^3 - 5\ x^2 + 3\ x + 9 = (x - 3)^2(x + 1)$. Para comparar la convergencia del método de Newton y el método de Newton generalizado, ecuación $(X.1)$, después de algunas simplificaciones, obtenemos las sucesiones con términos (i):

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - 3)\ (p_n + 1)}{(3\ p_n - 1)}\ ,$$

para el método de Newton-Raphson, y, (ii):

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - 3)\ (p_n + 1)\ (3\ p_n - 1)}{(3\ p_n^2 + 2\ p_n + 11)}\ ,$$

para el método de Newton generalizado, ecuación $(X.1)$.

Con $p_0 = 1.5$, las iteraciones para (i) y (ii) nos dan los resultados siguientes:

Tabla 4

	(i)	(ii)
p_0	2.5	2.5
p_1	2.769230769	2.959595960
p_2	2.888259109	2.999791764
p_3	2.944944061	2.999999995
p_4	2.972665472	3.000000000
p_5	2.986379918	
p_{10}	2.999575778	
p_{15}	2.999986744	
p_{20}	2.999999586	
p_{25}	2.999999987	
p_{29}	2.999999999	
p_{30}	3.000000000	

3. CONVERGENCIA ACELERADA Y EL ALGORITMO Δ^2 DE AITKEN

En este apartado consideraremos una técnica, llamada **método Δ^2 de Aitken**, que se usa para acelerar la convergencia de cualquier sucesión que converja linealmente, independentemente de su origen.

Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión linealmente convergente con límite p; o sea que, para $e_n = p_n - p$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda \quad \text{y} \quad 0 < \lambda < 1\ .$$

Para investigar la construcción de una sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converja más rápidamente a p, supongamos que n es lo suficientemente grande para que el cociente pueda usarse para aproximar el límite. Si suponemos también que todas las e_n tienen el mismo signo, entonces

$$e_{n+1} \approx \lambda\ e_n \quad \text{y} \quad e_{n+2} \approx \lambda\ e_{n+1}\ .$$

Así que

$$p_{n+2} = e_{n+2} + p \approx \lambda\ e_{n+1} + p$$

ó

$$p_{n+2} \approx \lambda\ (p_{n+1} - p) + p \qquad \text{o sea} \qquad \lambda = \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}\ . \qquad (X.2a, b)\ .$$

Reemplazando $(n+1)$ por n en las ecuaciones $(X.2)$ da

$$p_{n+1} \approx \lambda\ (p_n - p) + p \qquad \text{o sea} \qquad \lambda = \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p}\ ; \qquad (X.3a, b)$$

y resolviendo las ecuaciones $(X.2)$ y $(X.3)$ para p mientras se elimina λ nos lleva a que

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{p_{n+2}\ p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n} \approx \\ &\approx \frac{p_n^2 + p_n\ p_{n+2} + 2\ p_n\ p_{n+1} - 2\ p_n\ p_{n+1} - p_n^2 - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n} \approx \\ &\approx \frac{(p_n^2 + p_n\ p_{n+2} - 2\ p_n\ p_{n+1}) - (p_n^2 - 2\ p_n\ p_{n+1} + p_{n+1}^2)}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n} \approx \\ &\approx p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n}\ . \end{aligned}$$

El método Δ^2 de Aitken está basado en la suposición de que la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n}\ , \qquad (X.4)$$

converge más rápidamente a p que la sucesión original $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ejemplo 7.

La sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $p_n = \cos(\frac{1}{n})$, converge linealmente a $p = 1$. Los primeros términos de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ están dados en la siguiente tabla.

Tabla 5

n	p_n	$\hat{p}_n$
1	0.54030	0.96178
2	0.87758	0.98213
3	0.94496	0.98979
4	0.96891	0.99342
5	0.98007	0.99541
6	0.98614	
7	0.98981	

Es evidente que $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge más rápidamente a p que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

La notación Δ asociada con esta técnica tiene su origen en la siguiente definición.

Definición

Dada la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, se define la **diferencia progresiva** Δp_n mediante

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \qquad \text{para}\ \ n \geq 0\ .$$

Las potencias mayores $\Delta^k p_n$ se definen recursivamente mediante

$$\Delta^k p_n = \Delta^{k-1}(\Delta p_n) \qquad \text{para} \;\; k \geq 2 \; .$$

Debido a la definición,

$$\begin{aligned} \Delta^2 p_n &= \Delta(p_{n+1} - p_n) = \\ &= \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = \\ &= (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n) = \\ &= p_{n+2} - 2\; p_{n+1} + p_n \; . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula para $\hat{p}_n$ dada en $(X.4)$ se puede escribir como

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \qquad \text{para} \;\; \text{toda} \;\; n \geq 0 \; . \tag{X.5}$$

Para ilustrar el método Δ^2 de Aitken de otra manera, supongamos que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al límite p como una sucesión geométrica decreciente con factor k:

$$p_{n+1} - p = k(p_n - p), \qquad |k| < 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

Entonces, k y p pueden ser obtenidos a partir de p_n, p_{n+1} y p_{n+2} usando las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p &= k(p_n - p) \; , \\ p_{n+2} - p &= k(p_{n+1} - p) \; . \end{aligned}$$

Haciendo la resta de estas ecuaciones:

$$k = \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+1} - p_n} \; ,$$

y sustituyendo en la primera ecuación, dado que $k \neq 1$:

$$p = \frac{k\; p_n - p_{n+1}}{k - 1} = \frac{p_n\; p_{n+2} - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2\; p_{n+1} + p_n} \; ,$$

que es la misma ecuación $(X.4)$.

Hasta ahora, en nuestra discusión del método Δ^2 de Aitken, hemos dicho que la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge más rápidamente a p que la sucesión original $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, pero no hemos dicho qué se entiende por *convergencia más rápida*. Los siguientes Teoremas explican esta terminología.

Teorema X.3

Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ cualquier sucesión que converja linealmente a un límite p con $e_n = p_n - p \neq 0$ para toda $n \geq 0$. Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0 \; .$$

Demostración: si la sucesión converge linealmente a p con $e_n = p_n - p \neq 0, \quad \forall n \geq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda$. Supongamos que n es lo suficientemente grande para que el cociente pueda usarse para aproximar el límite y que toda las e_n tienen el mismo signo, entonces $e_{n+1} \approx \lambda\ e_n$. Ahora calculamos el cociente:

$$\frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = \frac{p_n - \frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2\ p_{n+1}+p_n} - p}{p_n - p} = \frac{e_n - \frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2\ p_{n+1}+p_n}}{e_n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e_n}\ \frac{(p_{n+1} - p_n + p - p)^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n + 2\ p - 2\ p} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n)^2 - 2\ e_{n+1}/e_n + 1}{e_{n+2}/e_n - 2\ e_{n+1}/e_n + 1}\ .$$

Pasando al límite para $n \to \infty$ obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda^2 - 2\ \lambda + 1}{\lambda^2 - 2\ \lambda + 1}\right] = 1 - 1 = 0\ .$$

c.q.d.

Teorema X.4

Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ cualquier sucesión que se comporte asintóticamente como una sucesión geométrica, es decir existe k, $|k| < 1$, tal que

$$p_{n+1} - p = (k + \delta_n)\ (p_n - p), \qquad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0\ .$$

Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0\ .$$

Demostración: por hipótesis el error $e_n = p_n - p$ satisface $e_{n+1} = (k + \delta_n)\ e_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n &= e_{n+2} - 2\ e_{n+1} + e_n = \\ &= e_n\ [(k + \delta_{n+1})\ (k + \delta_n) - 2\ (k + \delta_n) + 1] = \\ &= e_n\ ((k-1)^2 + \mu_n) \qquad \text{con}\ \ \mu_n \to 0\ , \end{aligned}$$

y

$$p_{n+1} - p_n = e_{n+1} - e_n = e_n\ [(k-1) + \delta_n]\ .$$

Desde luego, $p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n \neq 0$ para grandes valores de n, dado que $e_n \neq 0$, $k \neq 1$ y $\mu_i \to 0$. Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida en $(X.4)$ está bien definida. Además,

$$\hat{p}_n - p = p_n - p - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n} = e_n - e_n \frac{[(k-1) + \delta_n]^2}{(k-1)^2 + \mu_n}$$

para valores grandes de n, y entonces (dado que $\delta_n \to 0$ y $\mu_n \to 0$ para $n \to \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{[(k-1) + \delta_n]^2}{(k-1)^2 + \mu_n}\right\} = 0\ .$$

c.q.d.

Algoritmo Δ^2 de Aitken.

==

Para encontrar una solución de $p = g(p)$, dada una aproximación inicial p_0:

Entrada: aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p o mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$, y calcular $p_1 = g(p_0)$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar:

$p_2 = g(p_1)$; (*calcular* p_{1+i});

$p = p_0 - \frac{(p_1-p_0)^2}{(p_2-2\ p_1+p_0)}$; (*calcular* $\hat{p}_{i-1}$);

Paso 4: si $|p - p_2| < TOL$ entonces SALIDA (p); *(procedimiento completado satisfactoriamente)* PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar

$p_0 = p_1$; *(redefinir p_0)*;

$p_1 = p_2$; *(redefinir p_1)*;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 =$* $'$, N_0); *(procedimiento completado sin éxito)*; PARAR.

==

4. CONVERGENCIA ACELERADA Y EL ALGORITMO DE STEFFERSEN

Aplicando el método Δ^2 de Aitken a una sucesión que converge linealmente obtenida de la iteración de punto fijo, podemos acelerar la convergencia a cuadrática. Este procedimiento es conocido como el **método de Steffersen** y difiere un poco de aplicar el método Δ^2 de Aitken directamente a una sucesión de iteración de punto fijo que sea linealmente convergente. El procedimiento directo construiría en orden

$$p_0 \ , p_1 = g(p_0) \ , p_2 = g(p_1) \ , \quad \to \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\} p_0 \ ,$$

$$p_3 = g(p_2) \ , \quad \to \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\} p_1 \ , \ldots \ ,$$

donde $\{\Delta^2\}$ se usa para indicar que se emplea la técnica Δ^2 de Aitken.

El método de Steffersen construye los mismos primeros cuatro términos p_0, p_1, p_2, $\hat{p}_0$; sin embargo, en el siguiente paso, supone que $\hat{p}_0$ es una mejor aproximación a p que p_2 y aplica iteración de punto fijo a $\hat{p}_0$ en lugar de a p_2. Cada tercer término es generado usando la técnica Δ^2 de Aitken; para los otros, se usa la iteración de punto fijo en el térmmino anterior. La sucesión generada es entonces:

$$p_0 \ , p_1 = g(p_0) \ , p_2 = g(p_1) \ , \quad \to \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\} p_0 \ ,$$

$$p_3 = \hat{p}_0 \ , p_4 = g(p_3) \ , p_5 = g(p_4) \ , \quad \to \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\} p_3 \ , \ldots \ .$$

Es decir, usando una nueva notación útil para el algoritmo empezando con la aproximación inicial $p_0 \equiv p_0^{(0)}$ tendremos

$$p_0^{(0)} \ , p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}) \ , p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}) \ , \quad \to \quad p_0^{(1)} = \{\Delta^2\} p_0^{(0)} \ ,$$

$$p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}) \ , p_2^{(1)} = g(p_1^{(1)}) \ , \quad \rightarrow \quad p_0^{(2)} = \{\Delta^2\}p_0^{(1)} \ ,$$
$$p_1^{(2)} = g(p_0^{(2)}) \ , p_2^{(2)} = g(p_1^{(2)}) \ , \quad \rightarrow \quad p_0^{(3)} = \{\Delta^2\}p_0^{(2)} \ ,$$
$$\vdots$$

Algoritmo de Steffersen.

==

Para encontrar una solución de $p = g(p)$, dada una aproximación inicial p_0:

Entrada: aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p o mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar:
$p_1 = g(p_0)$; (*calcular* $p_1^{(i-1)}$);
$p_2 = g(p_1)$; (*calcular* $p_2^{(i-1)}$);
$p = p_0 - \frac{(p_1-p_0)^2}{(p_2-2\ p_1+p_0)}$; (*calcular* $p_0^{(i)}$);

Paso 4: si $|p - p_2| < TOL$ entonces SALIDA (p); *(procedimiento completado satisfactoriamente)* PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$; *(redefinir* p_0*)*;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de* N_0 *iteraciones,* $N_0 = \ '$, N_0); *(procedimiento completado sin éxito)*; PARAR.

==

Nótese que $\Delta^2 p_n$ puede ser cero. Si esto sucediera, terminaríamos la sucesión y seleccionaríamos $p_2^{(n-1)}$ como la respuesta aproximada, ya que de otra manera esto introduciría un cero en el denominador de la siguiente iteración.

Ejemplo 8.

Para resolver $x^3+4\,x^2-10 = 0$ usando el método de Steffersen, escribimos $x^3+4\,x^2 = 10$ y resolvemos x dividiendo entre $x + 4$. Entonces,

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}} \ .$$

Usando $p_0 = 1.5$ el procedimiento de Steffersen da los valores de la siguiente tabla.

Tabla 6

k	$p_0^{(k)}$	$p_1^{(k)}$	$p_2^{(k)}$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	1.365230583
2	1.365230013		

El valor de $p_0^{(2)} = 1.365230013$ es exacto en nueve cifras decimales. En este ejemplo, el método de Steffersen da aproximadamente la misma rapidez de convergencia que el método de Newton.

Del ejemplo 8, parece que el método de Steffersen da convergencia cuadrática sin evaluar derivadas. En realidad éste es el caso.

Teorema X.5

Supongamos que $x = g(x)$ tiene la solución p con $g'(p) \neq 1$. Si existe $\delta > 0$ tal que $g \in \mathcal{C}^3[p-\delta, p+\delta]$, entonces el método de Steffersen da convergencia cuadrática para cualquier $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

La debilidad del método de Steffersen reside en la necesidad de que $g'(p) \neq 1$, condición que es equivalente a requerir que la multiplicidad del cero p sea uno, para el problema correspondiente de búsqueda de la raíz de $f(x) = 0$. Como consecuencia de esto, no se puede esperar que el método de Steffersen acelere a cuadrática la convergencia lineal que resulta generalmente cuando el método de Newton se usa para aproximar un cero de multiplicidad mayor que uno.

Ejemplo 9.

Queremos resolver $f(x) = x^2 - \cos x = 0$ usando el método de Steffersen, y comparar con el método Δ^2 de Aitken y con el de Newton-Raphson. Entonces, escribimos

$$x = g(x) = \sqrt{\cos x}\ ,$$

para los métodos de Aitken y de Steffersen, y

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^2 - \cos p_n}{2\ p_n + \sin p_n}\ ,$$

para las iteraciones de Newton-Raphson. Usando $p_0 = 1.0$, la iteración funcional, el método Δ^2 de Aitken, el algoritmo de Steffersen y el de Newton-Raphson dan los resultados de la tabla siguiente:

Tabla 7

k	Punto fijo	Aitken	Steffersen	Newton
0	1.0	0.820545868	0.820545868	1.0
1	0.735052587	0.823387630	0.824131023	0.838218410
2	0.861275501	0.823989495	0.824132312	0.824241868
3	0.807137107	0.824103654	0.824132312	0.824132319
4	0.831606374	0.824126663		0.824132312
5	0.820785901	0.824131189		0.824132312
6	0.825618791	0.824132090		
7	0.823469674	0.824132268		
8	0.824427236	0.824132304		
9	0.824000957	0.824132311		
10	0.824190798	0.824132312		
11	0.824106268	0.824132312		
15	0.824131288			
20	0.824132330			
25	0.824132312			

EJERCICIOS.

1. Usar el método de Newton para resolver la ecuación

$$0 = \left(\text{sen}(x) - \frac{x}{2}\right)^2$$

con $p_0 = \frac{\pi}{2}$, hasta que se obtenga una precisión de 10^{-5} para la raíz aproximada. Luego usar la ecuación $(X.1)$ e iteración funcional para encontrar una raíz, exacta en 10^{-5} de la misma función $f(x)$, empezando con $p_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. Usar el método generalizado de Newton-Raphson descrito en la ecuación $(X.1)$ para encontrar una aproximación a la raíz de

$$f(x) = x^2 + 2\ x\ e^x + e^{2x} = 0$$

empezando con $p_0 = 0$ y efectuando 10 iteraciones.

3. Usar el método generalizado de Newton-Raphson descrito en la ecuación $(X.1)$ para encontrar una aproximación a la raíz de

$$f(x) = e^{6x} + 3\ (\ln 2)^2\ e^{2x} - (\ln 8)\ e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$$

empezando con $p_0 = 0$ y hasta que $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$. Repetir los calculos con las constantes en $f(x)$ reemplazadas por sus aproximaciones a cuatro dígitos ($f(x) = e^{6x} + 1.441\ e^{2x} - 2.079\ e^{4x} - 0.3330 = 0$).

4. Demostrar que las siguientes sucesiones $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergen linealmente a $p = 0$. Encontrar cuántos términos deben generarse antes de que $|p_n - p| \leq 0.05$.

a) $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geq 1,$ *b)* $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \geq 1 .$

5. Resolver $x^3 - x - 1 = 0$ para la raíz en $[1, 2]$ con una exactitud de 10^{-4} usando el método de Steffersen.

6. Resolver $x - 2^{-x} = 0$ para la raíz en $[0, 1]$ con una exactitud de 10^{-4} usando el método de Steffersen.

7. Usar el método de Steffersen con $p_0 = 0$ para calcular una aproximación de $\sqrt{3}$ exacta en cuatro dígitos significativos.

8. Aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones con una precisión de 10^{-5}, usando el método de Steffersen.

a) $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3},$ *b)* $3\ x^2 - e^x = 0,$ *c)* $x - \cos x = 0 .$

9. Para las siguientes sucesiones $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, linealmente convergentes, usar el método Δ^2 de Aitken para generar una sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ hasta que $|\hat{p}_n - p| \leq 5 * 10^{-2}$.

a) $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geq 1,$ *b)* $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \geq 1 .$