

Capítulo 8

Integral Curvilínea

8.1. Planteamiento del problema

En su forma mecánica más sencilla, el trabajo W efectuado por cierta fuerza F a lo largo de cierta distancia d se define como el valor de la fuerza multiplicado por la distancia:

$$W = Fd \quad (8.1)$$

La definición (8.1) puede aplicarse fácilmente en casos sencillos. Como la fuerza es una magnitud vectorial, elegiremos como signo positivo el sentido creciente de los ejes coordenados.

Ejemplo 8.1 Supongamos que soltamos un sólido de masa $M = 5 \text{ Kg}$ desde una altura $h = 3 \text{ m}$ (ver Figura 8.1(a)). En este caso, el trabajo que efectúa la fuerza de la gravedad $F = F_g$ para desplazar el sólido desde la altura $h = 3 \text{ m}$ hasta el suelo ($h = 0 \text{ m}$) será:

$$W_g = F_g d = -5 \cdot 9.8 \cdot 3 = -49 \cdot 3 = -147 \text{ J} \text{ (la unidad empleada es Newton por metro, el Julio)}$$

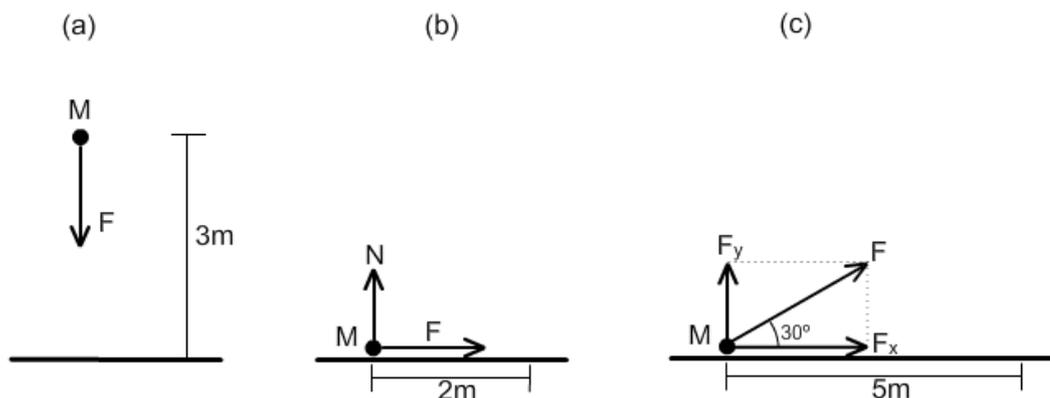


Figura 8.1: Cálculo del Trabajo

Ejemplo 8.2 Ahora supongamos que el sólido se encuentra en el suelo y que lo deslizamos 2 m hacia la derecha aplicando cierta fuerza horizontal F (ver Figura 8.1(b)). Sabemos que en este caso la fuerza F debe ser por lo menos igual a la fuerza de rozamiento. Para una masa M , la fuerza de rozamiento F_r está relacionada con el coeficiente de rozamiento μ del suelo y con el valor de la fuerza normal N :

$$F_r = -\mu N = -\mu g M \quad (8.2)$$

Así pues, si suponemos $\mu = 0.25$ en nuestro caso, $F_r = -0.25 \cdot 9.8 \cdot 5 = -12.25 \text{ N}$. Con lo cual, la fuerza $F = 12.25 \text{ N}$ deslizará la masa y el trabajo que efectuará F será $W_F = 12.25 \cdot 2 = 24.5 \text{ J}$. Como el desplazamiento de la masa es sólo horizontal, la fuerza de la gravedad F_g no tiene componente en esa dirección y por tanto no realiza trabajo.

Ejemplo 8.3 En tercer lugar, supongamos que una fuerza F de 60 N se aplica a la masa siguiendo un ángulo de 30° , desplazándola una distancia de 5 m, como aparece en la Figura 8.1(c). Cuando una fuerza actúa sobre un objeto, únicamente realiza trabajo la componente de la fuerza en la dirección del movimiento. En nuestro caso, el vector F se descompone en sus componentes horizontal $F_x = 60 \cos(30) = 51.96$ N y vertical $F_y = 60 \sin(30) = 30$ N. La componente vertical no tiene un valor suficiente para elevar el sólido (el valor mínimo es $M_g = 5 \cdot 9.8 = 49$ N), de modo que F_y no realiza trabajo. En cambio, el trabajo que efectúa F_x será $W_x = 30 \cdot 5 = 150$ J.

Ejemplo 8.4 Y ahora supongamos que soltamos el objeto desde una altura $h = 3$ m como en la primera situación, pero también aplicamos la fuerza $F = 60$ N como en la tercera situación (ver Figura 8.2(a)). Vamos a calcular el trabajo que realiza cada fuerza.

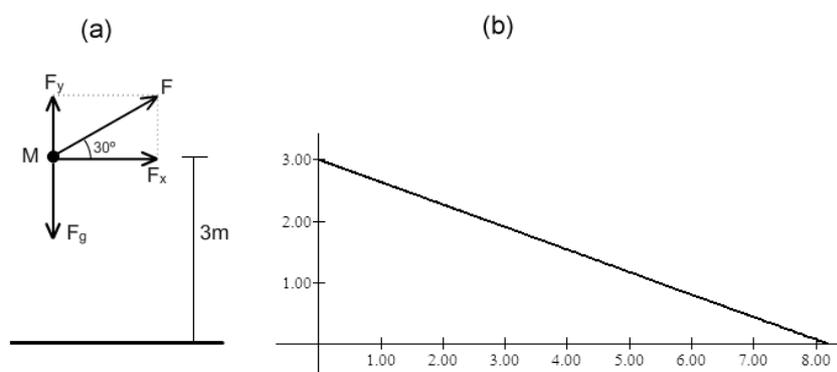


Figura 8.2: Trayectoria del ejemplo 8.4

En la dirección vertical actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad $F_g = -5 \cdot 9.8 = -49$ N, y la componente vertical de F , que es $F_y = 30$ N. En la dirección horizontal actúa sólo la componente horizontal de F , que es $F_x = 51.96$ N. Ahora debemos calcular la dirección del movimiento.

Sabemos que el espacio $E(t)$ recorrido por un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado de aceleración a , que parte del reposo con distancia inicial recorrida igual a E_0 es $E(t) = E_0 + 0.5at^2$. Por otra parte, la segunda ley de Newton relaciona la aceleración a de un objeto conocida su masa M y la fuerza F aplicada: $F = Ma$. Así pues, en el eje OY la ecuación del desplazamiento será

$$E_y(t) = 3 + 0.5t^2(-49 + 30)/5 = 3 - 1.9t^2$$

En el eje OX la ecuación del desplazamiento será $E_x(t) = 0.5t^2(51.96)/5 = 5.196t^2$. Ahora, es fácil comprobar que la distancia vertical $h = 3$ m se recorre al cabo de $t = 1.256$ s, de modo que la distancia horizontal recorrida será $E_x(1.256) = 5.195(0.796)^2 = 8.2$ m. La Figura 8.2(b) muestra la gráfica de la trayectoria que en coordenadas paramétricas se expresa:

$$(x(t), y(t)) = (5.195t^2, 3 - 1.9t^2), t \in [0, 1.256]$$

Ejercicio 8.1 ¿Te extraña que la trayectoria resultante sea recta? Demuestra que la trayectoria dada en coordenadas paramétricas $(x(t), y(t)) = (5.195t^2, 3 - 1.9t^2)$ es, en efecto, una recta.

¿Cómo calculamos el trabajo realizado por cada fuerza? Observa la Figura 8.3. En general, si F es un vector fuerza y V es un vector que indica la dirección de desplazamiento, sólo realiza trabajo la componente de F en la dirección V . Si llamamos F_V a esta componente, se tendrá:

$$F_V = \|F\| \cos \alpha$$

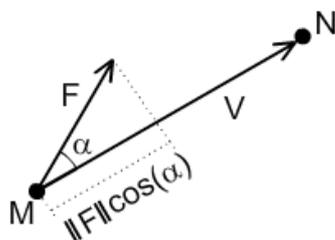


Figura 8.3: Fuerza eficaz

Así pues, el trabajo W realizado por la fuerza F cuando la masa se desplaza desde M hasta N siguiendo la dirección V es:

$$W = \|F\| \cos \alpha \|V\| = \|F\| \|V\| \cos \alpha = F \cdot V$$

De modo que W es el producto escalar de F y V . Vamos a aplicar este resultado a nuestro ejemplo.

$$M = (0, 3), \quad N = (8.2, 0), \quad V = MN = (8.2, -3)$$

$$F_g = (0, -49), \quad W_g = F_g \cdot V = (0, -49) \cdot (8.2, -3) = 147 \text{ J}$$

$$F_y = (0, 30), \quad W_y = F_y \cdot V = (0, 30) \cdot (8.2, -3) = -90 \text{ J}$$

$$F_x = (51.96, 0), \quad W_x = F_x \cdot V = (51.96, 0) \cdot (8.2, -3) = 426.072 \text{ J}$$

¿Y cual será el trabajo W_r efectuado por la fuerza resultante $F_r = F_g + F_y + F_x$? Naturalmente, podemos sumar los trabajos parciales, $W_r = W_g + W_y + W_x = 483.072 \text{ J}$, pero también podemos hacer el cálculo directo:

$$F_r = F_g + F_y + F_x = (0, -49) + (0, 30) + (51.96, 0) = (51.96, -19)$$

$$W_r = F_r \cdot V = (51.96, -19) \cdot (8.2, -3) = 483.072 \text{ J}$$

Podemos visualizar esta situación trazando la trayectoria que sigue la partícula “sumergida” en cada uno de los campos de vectores fuerza. La Figura 8.4 muestra respectivamente

los campos de vectores de F_g , F_y , F_x y F_r . Observa que los vectores en cada campo aparecen representados con el mismo módulo, y por ello los gráficos como los de la Figura 8.4 nos indican la dirección y el sentido de los vectores del campo, pero no dan idea de su módulo. La Figura 8.5 muestra la dirección, el sentido y el módulo de los cinco vectores F , F_g , F_y , F_x y F_r aplicados en un mismo punto de la trayectoria.

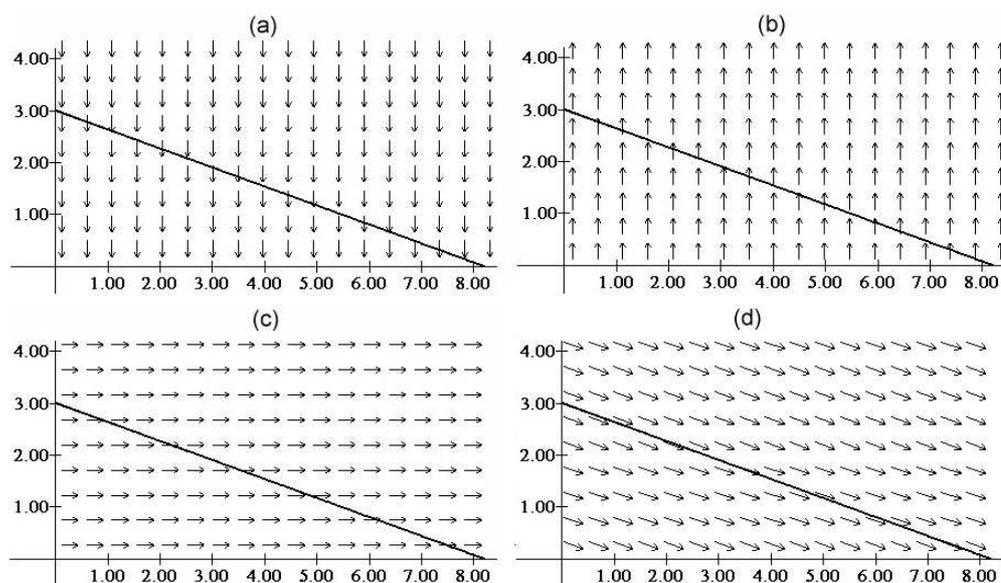


Figura 8.4: Varios campos

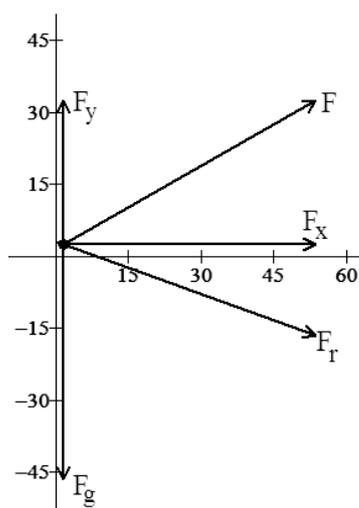


Figura 8.5: Vectores

Ejercicio 8.2 ¿Cómo crees que cambiarán los gráficos de las figuras 8.4 y 8.5 si cambia la masa del sólido?

Sin embargo, las situaciones reales no suelen ser tan sencillas como las de estos ejemplos. La mayoría de las veces la fuerza resultante es suma de muchas fuerzas y además no siempre son constantes. Dos ejemplos usuales son los campos gravitatorios y los magnéticos. El valor de la fuerza en cada punto P no es constante, sino que depende de la posición (x, y) de P . Vamos a denotar como $V(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ al vector fuerza aplicado en cada punto (x, y) . ¿Cómo se podrá calcular el trabajo en este caso?

Ejemplo 8.5 Vamos a simular el campo gravitatorio generado por tres masas M_1 , M_2 y M_3 . Como sabes, el valor $F(x, y)$ del campo gravitatorio en cierto punto $Q(x, y)$ generado por una masa M_1 situada en un punto $P(a, b)$ es proporcional a M_1 e inversamente proporcional a la distancia entre P y Q . Vamos a tomar:

$$F(x, y) = \frac{M_1}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Una partícula situada en cierto punto $Q(x, y)$ se verá atraída por M_1 siguiendo la dirección en la que más aumenta el valor del campo $F(x, y)$, es decir, siguiendo la dirección del gradiente de $F(x, y)$, $\nabla(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Ya tenemos aquí nuestro campo de vectores: en cada punto (x, y) está definido en vector $\nabla(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Así pues, en este caso $X(x, y) = F_x(x, y)$, $Y(x, y) = F_y(x, y)$.

Observa la Figura 8.6. Representa los puntos donde se localizan tres masas M_1 , M_2 y M_3 y el valor de cada una de ellas. M_1 toma el valor 1.6 y se sitúa en el punto $(a, b) = (-8, 5.2)$. M_2 toma el valor 50 y se sitúa en el punto $(p, q) = (9.6, 8.4)$. M_3 toma el valor 1.1 y se sitúa en el punto $(c, d) = (5, -2.2)$.

Los campos de vectores de cada una de las tres masas serán:

$$F(x, y) = \frac{M_1}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\nabla(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$$

$$G(x, y) = \frac{M_2}{(x - p)^2 + (y - q)^2}$$

$$\nabla(G) = (G_x(x, y), G_y(x, y))$$

$$H(x, y) = \frac{M_3}{(x - c)^2 + (y - d)^2}$$

$$\nabla(H) = (H_x(x, y), H_y(x, y))$$

La Figura 8.7(a) muestra el campo de vectores $\nabla(F)$ es decir, el campo de fuerza debido sólo a M_1 . Las figuras 8.7(b,c) muestran respectivamente los campos de vectores $\nabla(G)$ y $\nabla(H)$ es decir, los campos de fuerza debidos separadamente a M_2 y M_3 . Luego hemos sumado los tres vectores de fuerza, obteniendo el campo definido por

$$\begin{aligned} V &= \nabla(F + G + H) = \nabla(F) + \nabla(G) + \nabla(H) = \\ &= (F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y), F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y)) \end{aligned} \quad (8.3)$$

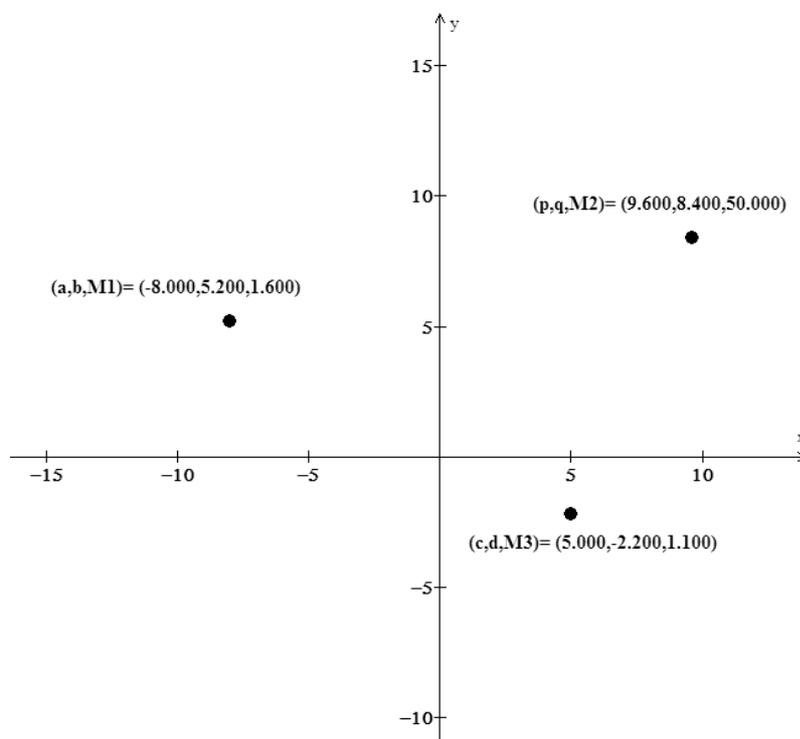


Figura 8.6: Tres masas

La Figura 8.7(d) muestra el campo de fuerza resultante.

¿Y qué le ocurrirá a una partícula que soltemos en un punto (x, y) del plano? ¿Qué trayectoria seguirá en el caso de que no se vea sometida a ninguna otra fuerza? Observa la Figura 8.8. Hemos trazado las gráficas de algunas de estas trayectorias. Cada trayectoria parte de un cierto punto inicial (x_0, y_0) y termina en alguno de los puntos donde se encuentra una masa.

Observa en la Figura 8.8 las trayectorias (1), (2) y (3). El punto de partida (x_0, y_0) se encuentra relativamente cerca de una masa, y la trayectoria que sigue la partícula converge hacia esa masa. Sin embargo, observa cómo las parejas trayectorias (5)-(8) y (6)-(7) convergen hacia puntos distintos. Los puntos iniciales se encuentran mucho más próximos a M_1 que a M_2 y sin embargo las trayectorias (5) y (6) convergen a M_2 en vez de a M_1 . Exactamente lo mismo ocurre con la trayectoria (4), que en vez de converger hacia M_3 lo hace hacia M_2 . ¿Por qué? Porque la masa M_2 es mucho mayor que las otras dos.

La Figura 8.9 muestra, al igual que la 8.7(d), el campo de gradientes resultante, sin ninguna trayectoria trazada, pero más denso, hemos trazado muchos más vectores. De este modo se puede apreciar todavía más clara la tendencia de los vectores del campo a orientarse hacia la masa M_2 .

Ejercicio 8.3 Sobre la Figura 8.9, elige algunos puntos iniciales (x_0, y_0) y traza aproxima-

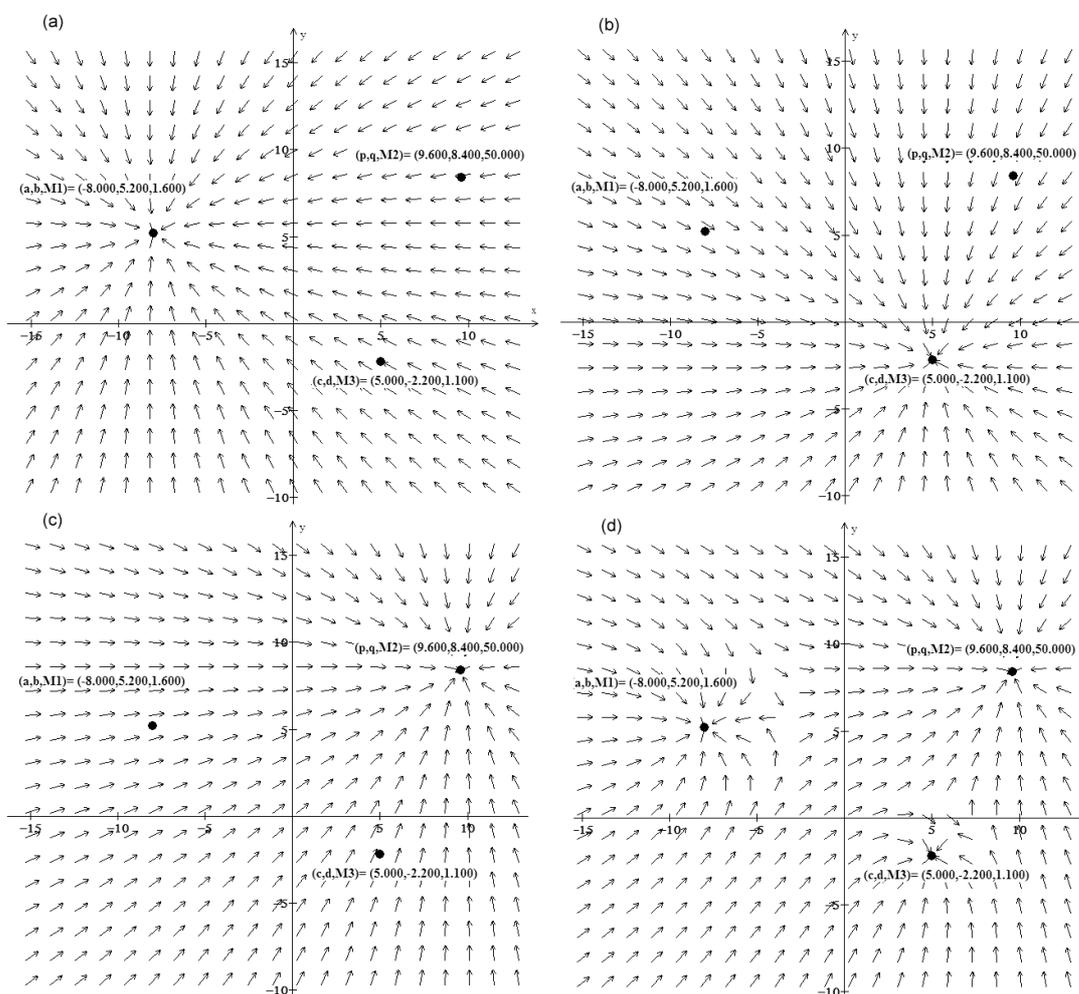


Figura 8.7: Campos gravitatorios

damente las correspondientes trayectorias (que se llaman líneas de campo).

¿Y cómo hemos trazado las líneas de campo de la Figura 8.8? Supongamos que $(x(t), y(t))$ es la representación paramétrica de una de estas líneas, y que pasa por el punto $(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0))$. Según la ecuación (8.3), la tangente $(x'(t), y'(t))$ a la trayectoria es igual al vector gradiente de $F(x, y) + G(x, y) + H(x, y)$ en cada punto, de modo que $x(t), y(t)$ son la solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y) \\
 y'(t) &= F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y) \\
 x(t_0) &= x_0 \\
 y(t_0) &= y_0
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

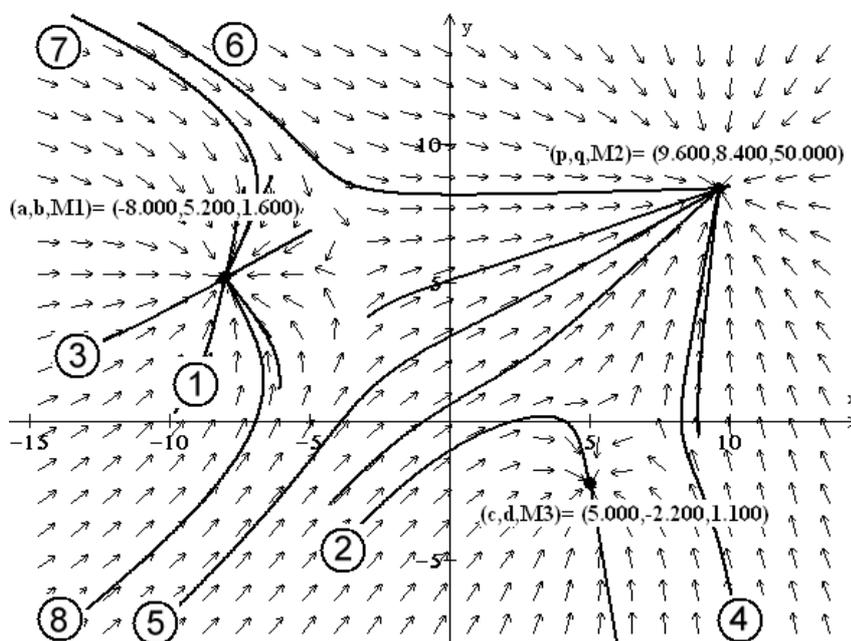


Figura 8.8: Líneas de fuerza

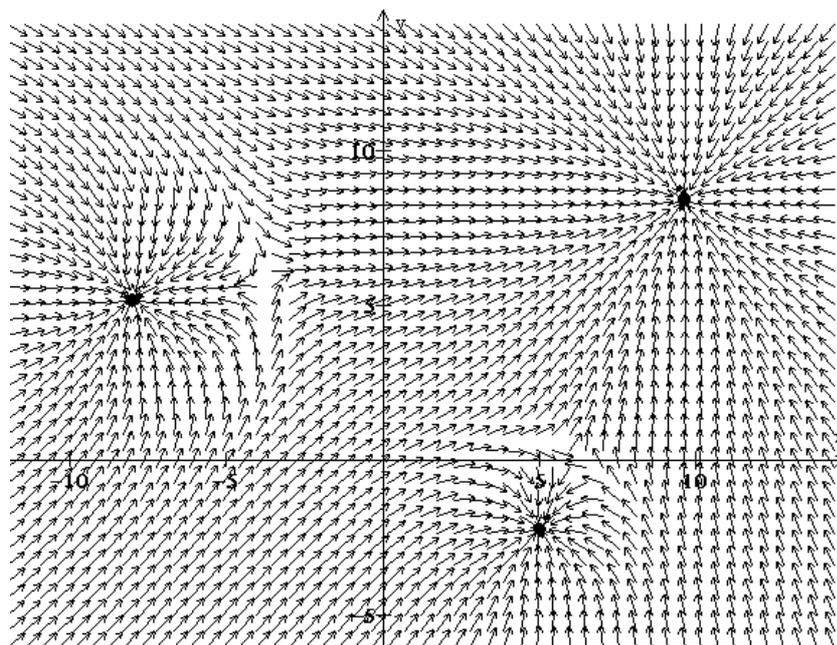


Figura 8.9: Campo gravitatorio muy denso

Las dos primeras ecuaciones de (8.4) son ecuaciones diferenciales porque en ellas aparecen las derivadas de las funciones solución $x(t)$ e $y(t)$. Las dos últimas condiciones $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ se llaman condiciones iniciales. Resolver el problema (8.4) significa encontrar las funciones $x(t)$ e $y(t)$ que cumplan todas las condiciones de (8.4). Por ejemplo, puedes comprobar como ejercicio que las funciones $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$ son solución del problema siguiente:

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y \\y' &= -y \\x(0) &= 2 \\y(0) &= 1\end{aligned}\tag{8.5}$$

La Figura 8.10 muestra el campo de tangentes de las ecuaciones diferenciales de (8.5) y también algunas soluciones del mismo. Cada una de estas soluciones se obtiene fijando un punto (x_0, y_0) por el que debe pasar la solución. La curva que tiene trazo más grueso es la solución del problema (8.5), $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$, que pasa por el punto $M(2, 1)$.

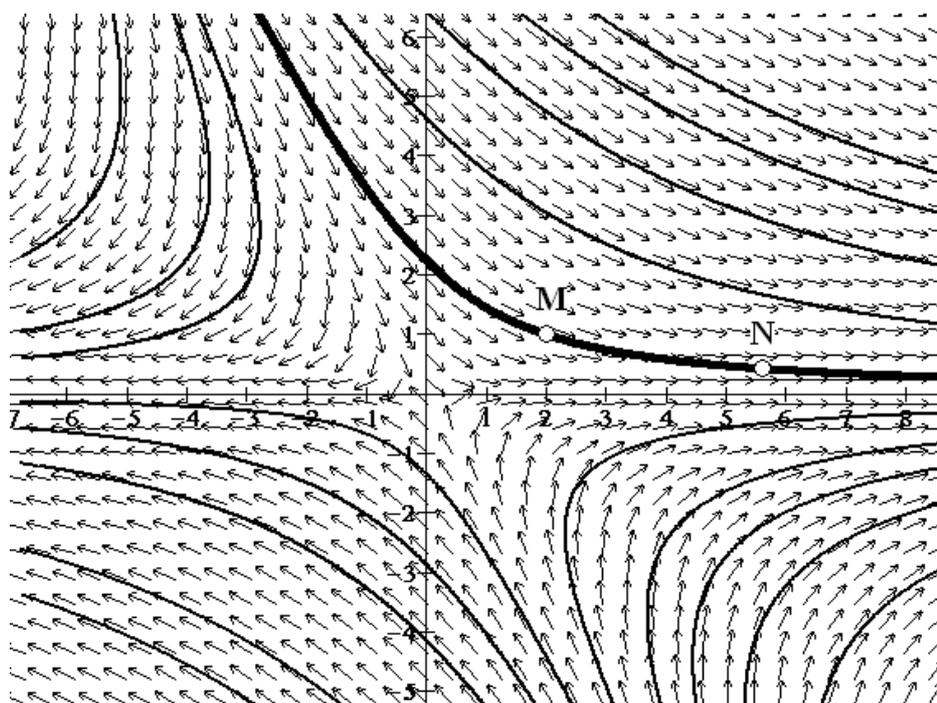


Figura 8.10: Ejemplo de campo y soluciones

En el Tema 9 aprenderemos a resolver problemas que contienen ecuaciones diferenciales como los problemas (8.4) y (8.5). De momento, es suficiente con saber que algunos programas como Winplot permiten calcular mediante métodos numéricos la solución, y representarla gráficamente. De este modo hemos elaborado las anteriores gráficas de campos vectoriales y trayectorias.

Pero volvamos a nuestro problema. ¿Cómo calcular el trabajo W que efectúa una fuerza $V = (X(x, y), Y(x, y))$ cuando una partícula se traslada desde un punto inicial M hasta un punto final N siguiendo una línea del campo de V ? Por ejemplo (ver Figura 8.10), ¿cuál será el trabajo W efectuado por la fuerza definida por (8.5) al llevar una partícula desde el punto $M(2, 1)$ hasta el punto $N(5.56, 0.44)$ siguiendo la línea de campo $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$?

Y todavía una pregunta más general, ¿cómo calcular el trabajo W efectuado por la fuerza V si seguimos una trayectoria cualquiera, aunque no sea una línea de fuerza? Veamos cómo se enuncia el problema de forma general:

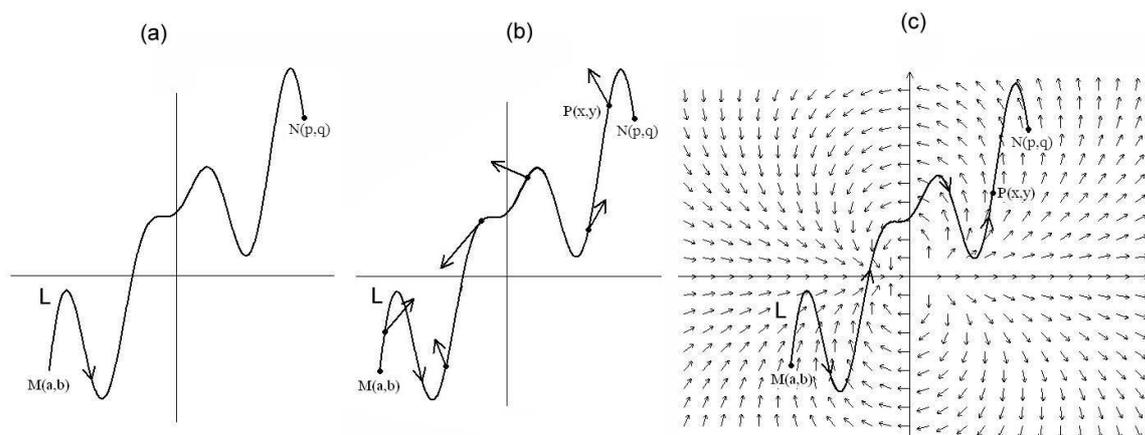


Figura 8.11: Caso general

Supongamos que una partícula $P(x, y)$ se desplaza a lo largo de una trayectoria L desde un punto inicial $M(a, b)$ hasta un punto final $N(p, q)$ (Figura 8.11(a)). Observa que se trata de una trayectoria orientada, esto es, elegimos para L un cierto sentido de recorrido. La trayectoria L que sigue $P(x, y)$ se deberá a la resultante de todas las fuerzas que se estén aplicando en $P(x, y)$.

Supongamos que el vector $V(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ es una de esas fuerzas. La dirección, el sentido y el módulo de V dependerán en general del punto (x, y) donde se aplica la fuerza. La Figura 8.11(b) muestra el vector fuerza $V = (X(x, y), Y(x, y))$ aplicado en algunos puntos de la curva L . La Figura 8.11(c) muestra la trayectoria de la partícula “sumergida” en el campo de fuerzas $V = (X(x, y), Y(x, y))$.

Ejercicio 8.4 *Observa el ejemplo de trayectoria L y de campo V de vectores de la Figura 8.11(c). ¿Crees que L es una línea de campo de V ?*

El problema es: ¿Cómo calcular el trabajo W efectuado por $V = (X(x, y), Y(x, y))$ cuando la partícula se traslada desde $M(a, b)$ hasta $N(p, q)$ siguiendo la trayectoria L ?

¿Tendrá algo que ver este problema con algún concepto que ya conozcamos (derivada, integral, etc)? Una idea que podemos explorar para buscar una solución es la siguiente.

1. Tenemos una trayectoria orientada L , que une los puntos M y N (Figura 8.12(a)).

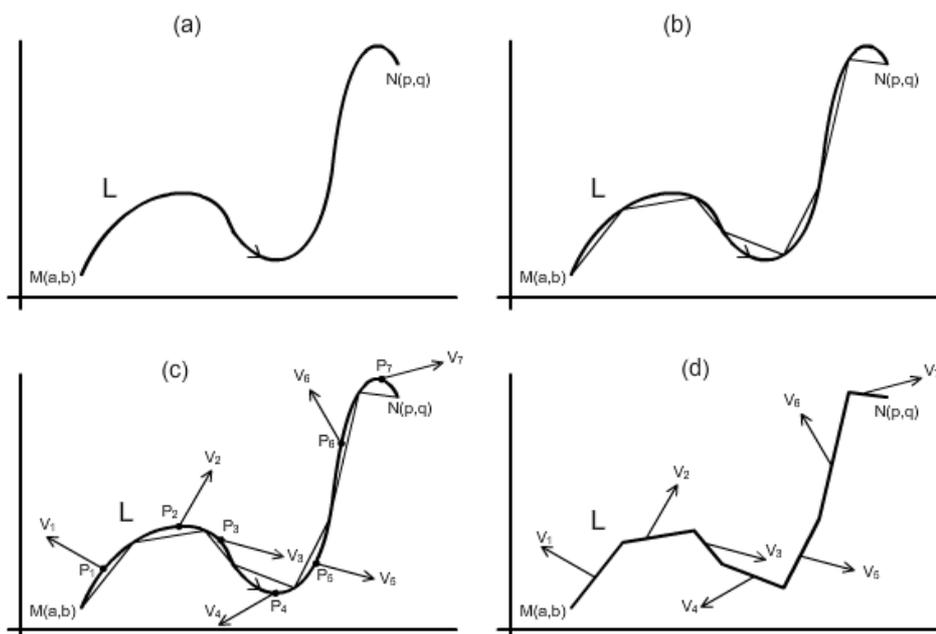


Figura 8.12: Cálculo de una integral curvilínea

2. Dividimos L en n arcos y aproximamos la curva mediante una línea poligonal. La Figura 8.12(b) muestra una curva dividida en $n = 7$ arcos.
3. Tomamos un punto cualquiera P_i de cada uno de los n arcos de curva. En cada punto P_i estará definido el vector fuerza V_i . La Figura 8.12(c) muestra una posible elección de siete puntos P_1, \dots, P_7 sobre L y los correspondientes vectores V_1, \dots, V_7 .
4. Trabajamos con la aproximación poligonal en vez de con la curva L . Suponemos como aproximación que en cada segmento recto C_i de la línea poligonal, el vector fuerza es constante igual a V_i (Figura 8.12(d)).
5. En cada segmento recto C_i calculamos el trabajo W_i efectuado por la fuerza V_i (hemos supuesto que la fuerza es constante en ese segmento). Sabemos hacer este cálculo: sólo hay que multiplicar escalarmente el vector fuerza V_i y el vector director del tramo recto C_i (Figura 8.12(d)).
6. Sumamos los n valores de W_i . El resultado es una aproximación al valor W del trabajo total que estamos buscando, $W \approx W_1 + \dots + W_n$.
7. Hacemos que el número n de arcos tienda hacia ∞ , cuidando de que las longitudes de cada uno de ellos tienda hacia 0.

8. El valor buscado W será:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i$$

¿No te recuerda este procedimiento al cálculo de una integral? En el siguiente apartado detallaremos las operaciones y mostraremos que, en efecto, la integración de cierta función nos va a permitir resolver el problema de cálculo del trabajo.

8.2. Integral curvilínea en el plano

Vamos desarrollar el procedimiento que describimos en el apartado anterior. Como la curva L es conocida, sea $x(t), y(t) t \in [\alpha, \beta]$ una parametrización de la misma. Como indica la Figura 8.13(a), los puntos $(x(t), y(t))$ de la curva L se obtienen dando valores al parámetro $t \in [\alpha, \beta]$. El punto $M(a, b)$ se obtiene dando a t el valor $t = \alpha$, es decir, $x(\alpha) = a, y(\alpha) = b$. El punto $N(p, q)$ se obtiene para $t = \beta$, es decir, $x(\beta) = p, y(\beta) = q$. Trabajemos ahora con la Figura 8.13(b). Hemos representado en esta figura uno de los arcos en que hemos dividido la curva. Los puntos del arco se obtienen dando al parámetro t valores en cierto subintervalo $[r, s] \subset [\alpha, \beta]$. Los extremos del arco serán $P(x(r), y(r)), Q(x(s), y(s))$.

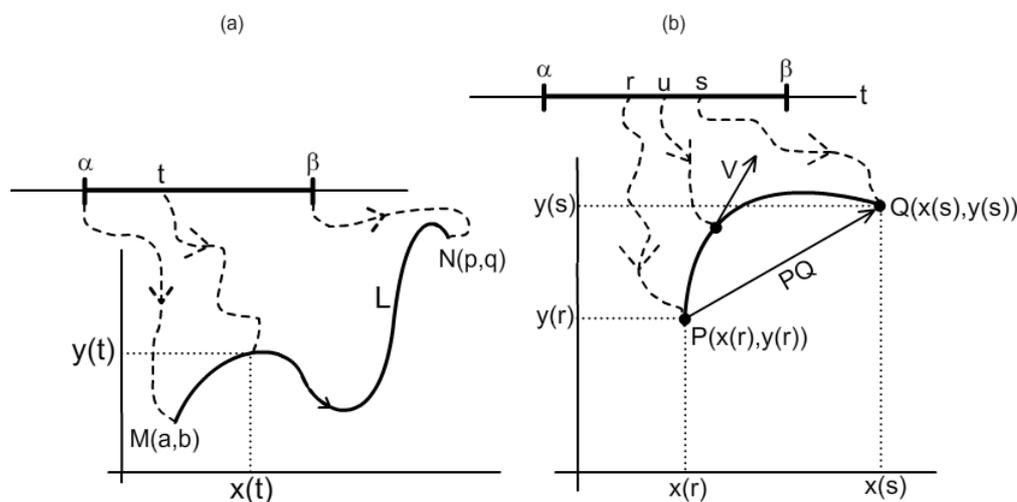


Figura 8.13: Parametrización de curvas

El vector fuerza V se evalúa en un punto cualquiera del arco, de modo que tomamos cualquier valor $u \in [r, s]$:

$$V = (X(x(u), y(u)), Y(x(u), y(u)))$$

El vector desplazamiento (tramo recto) es $S = PQ = (x(s) - x(r), y(s) - y(r))$. Según lo que vimos en el ejemplo 8.4, el trabajo W realizado por la fuerza V al seguir el segmento

recto $S = PQ$ será:

$$\begin{aligned} W &= V \cdot S = (X(x(u), y(u)), Y(x(u), y(u))) \cdot (x(s) - x(r), y(s) - y(r)) = \\ &= X(x(u), y(u)) \cdot (x(s) - x(r)) + Y(x(u), y(u)) \cdot (y(s) - y(r)) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ahora vamos a fijarnos en los factores $(x(s) - x(r))$, $(y(s) - y(r))$ de la relación (8.6). ¿Conocemos algún teorema que nos diga cuanto valen estos dos términos? Pues sí, el teorema del valor medio de Lagrange. Recordemos su enunciado:

”Si $y(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , existe al menos un punto $z \in (a, b)$ tal que $y'(z) = (y(b) - y(a))/(b - a)$ ”. Geométricamente es sencillo interpretar este resultado, ver Figura 8.14, significa que existe al menos un punto $z \in (a, b)$ en el que la tangente es paralela a la secante que une los puntos $(a, y(a))$, $(b, y(b))$.

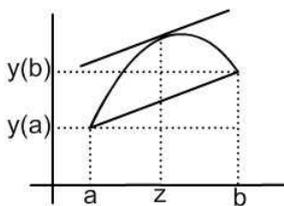


Figura 8.14: Teorema del valor medio

En nuestro caso, aplicamos el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[r, s]$ a la función

$$p(t) = X(x(u), y(u))x(t) + Y(x(u), y(u))y(t) \quad (8.7)$$

Observa que en (8.7) el valor de u es constante y t es la variable. Según el teorema de Lagrange, existe $z \in (r, s)$ tal que $(s - r)p'(z) = p(s) - p(r)$, o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} (s - r)(X(x(u), y(u))x'(z) + Y(x(u), y(u))y'(z)) &= \\ = X(x(u), y(u))x(s) + Y(x(u), y(u))y(s) - X(x(u), y(u))x(r) - Y(x(u), y(u))y(r) &= \\ = X(x(u), y(u))(x(s) - x(r)) + Y(x(u), y(u))(y(s) - y(r)) &= V \cdot S \end{aligned}$$

Así pues, existe $z \in (r, s)$ tal que

$$W = V \cdot S = X(x(u), y(u))x'(z)(s - r) + Y(x(u), y(u))y'(z)(s - r)$$

Ahora, como podemos dar al parámetro u un valor cualquiera en el intervalo $[r, s]$, elegimos precisamente $u = z \in (r, s)$ y llamamos $h = s - r$. Entonces:

$$\begin{aligned} W &= V \cdot S = X(x(z), y(z))x'(z)h + Y(x(z), y(z))y'(z)h = \\ &= (X(x(z), y(z))x'(z) + Y(x(z), y(z))y'(z))h \end{aligned}$$

Ya tenemos nuestra aproximación W al trabajo realizado por la fuerza V en uno de los n arcos en que hemos dividido la curva L . Ahora hacemos la misma operación en todos los arcos, tomamos $h = (\beta - \alpha)/n$ y sumamos las aproximaciones:

$$W \approx \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h$$

Con lo cual, tomando $n \rightarrow \infty$:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h \quad (8.8)$$

A estas alturas, esperamos que reconozcas en la relación (8.8) el valor de la integral de la función de una variable real $g(t) = X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(z), y(z))x'(z) + Y(x(z), y(z))y'(z)) dz \end{aligned} \quad (8.9)$$

La relación (8.9) nos indica un modo de calcular el trabajo W . El procedimiento es:

1. Evaluamos el vector fuerza $V = (X(x, y), Y(x, y))$ en los puntos de la curva, $(x(t), y(t))$. Con ello habremos obtenido el vector fuerza en función de la variable t :

$$V(t) = (X(x(t), y(t)), Y(x(t), y(t))), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

2. Calculamos el vector tangente a la curva en cada punto, $T(x'(t), y'(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$
3. Calculamos la función real $f(t)$ que nos da el producto escalar de ambos vectores T y V para cada valor de $t \in [\alpha, \beta]$:

$$f(t) = (X(x(t), y(t)), Y(x(t), y(t)))(x'(t), y'(t)) = X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

La Figura 8.15 muestra la trayectoria de la partícula “sumergida” en el campo de vectores de V . También hemos representado en ella dos parejas de vectores V y T , evaluados en dos puntos de la curva. Observa que hemos representado cada V y T con sus correspondientes módulos. El valor del producto escalar $V \cdot T$ cambia a medida que nos movemos por la curva, y hemos llamado $f(t)$ a su valor.

4. W es la integral de $f(t)$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Ejercicio 8.5 Resume en una sola frase el procedimiento de cálculo de W .

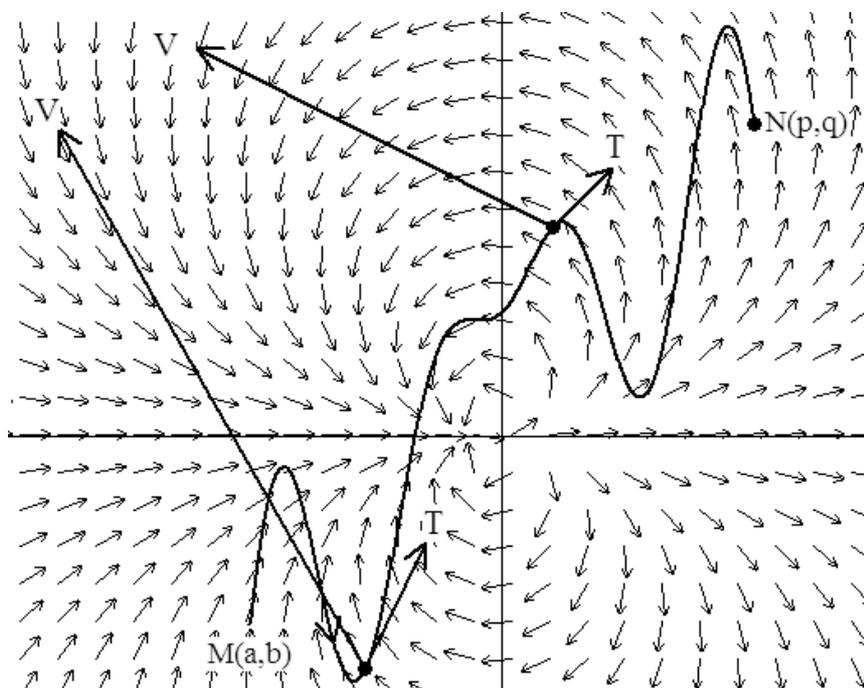


Figura 8.15: Dos pares V-T

Ejercicio 8.6 Aplica el procedimiento que acabamos de obtener para calcular el trabajo efectuado por la fuerza $V = (x - y, x + y)$ cuando se traslada una partícula desde el punto $M(-1, -3)$ al punto $N(3, 5)$ siguiendo dos trayectorias distintas:

1. La parábola $y = x^2 - 4$.
2. La recta $y = 2x - 1$.

Ejercicio 8.7 La Figura 8.16 muestra el campo de vectores de $V = (xy, x + y)$ y dos trayectorias L y C que unen los puntos $M(1.5, 0)$ y $N(7, 4.919)$.

1. ¿Cuál será el signo del trabajo realizado por V a lo largo de cada una de trayectorias?
2. Sabiendo que las curvas L y C vienen dadas respectivamente por las funciones $f(x) = (4.4(x - 1.5))^{1/2}$, $g(x) = 4.919(x - 1.5)^2 / (5.5)^2$, verifica tu respuesta al apartado anterior haciendo los cálculos.

Ejercicio 8.8 La Figura 8.17 muestra el campo vectorial de una fuerza V y dos trayectorias L y C . ¿Cuál es el signo de la integral curvilínea de V a lo largo de cada una de ellas?

Ejercicio 8.9 ¿Qué ocurre si cambiamos el sentido de recorrido de la curva L ? Generaliza este resultado.

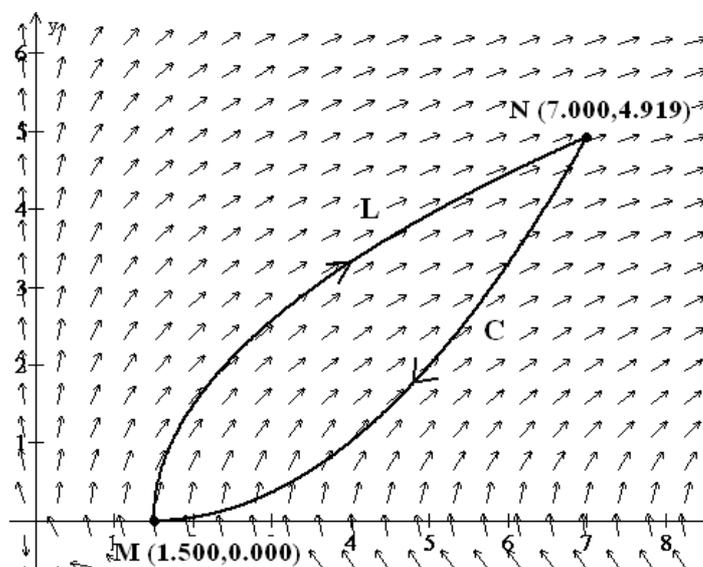
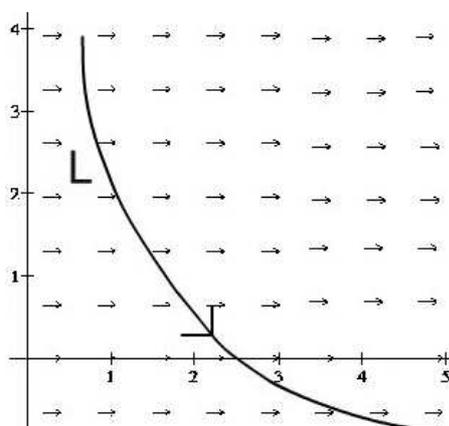


Figura 8.16: Dos trabajos

Figura 8.17: Signo del trabajo según L

Hemos encontrado un nuevo concepto que nos permite calcular el trabajo realizado por una fuerza. Viene a interpretarse como el cálculo de una integral a lo largo de una curva L . Vamos a definirlo de manera rigurosa:

Definición 8.1 Sea $V = (X(x, y), Y(x, y))$ una función vectorial definida en los puntos de una curva orientada cuya parametrización es $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Supongamos que el punto inicial de la curva es $M(x(\alpha), y(\alpha))$ y el punto final es $N(x(\beta), y(\beta))$. Llamamos integral curvilínea de V desde el punto M hasta el punto N siguiendo la trayectoria L , al

valor (si existe) definido por

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i)) h$$

Si V representa una fuerza aplicada en cada punto de la curva L , el valor de la integral curvilínea es igual al trabajo W efectuado por esa fuerza cuando un punto se traslada desde M hasta N siguiendo la curva L .

Y ahora enunciamos el resultado que hemos encontrado y que nos permite demostrar la existencia de la integral curvilínea y calcular su valor:

Teorema 8.1 *Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son continuas con derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$, y las funciones $X(x(t), y(t))$, $Y(x(t), y(t))$ son también continuas en $[\alpha, \beta]$, entonces la integral curvilínea existe y se puede evaluar de la siguiente forma:*

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Una curva $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ que verifique las hipótesis del teorema 8.1 (es decir, $x(t)$ e $y(t)$ son continuas, con derivadas continuas) se llama **suave**. El teorema 8.1 también puede aplicarse a una curva **suave a trozos**, es decir, que pueda descomponerse en un número finito de curvas suaves. La Figura 8.18 muestra una curva suave a trozos, formada por tres curvas suaves L_1 , L_2 y L_3 . La integral curvilínea a lo largo de una trayectoria suave a trozos se calcula sumando las integrales a lo largo de cada uno de los fragmentos.

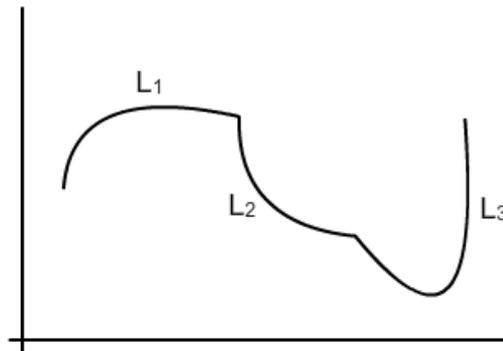


Figura 8.18: Curva suave a trozos

Ejercicio 8.10 *Como hemos visto, las líneas de campo del campo vectorial $V = (X(x, y), Y(x, y))$ son curvas cuya tangente en cada punto es igual a V . Es decir, una línea de campo L es una solución $x(t), y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$, del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x'(t) = X(x, y) \\ y'(t) = Y(x, y) \end{cases}$$

Por ejemplo, L puede ser un fragmento de cualquiera de las curvas de la Figura 8.19(a). Demuestra que en este caso, para calcular la integral curvilínea basta integrar en $[\alpha, \beta]$ el cuadrado del módulo del vector tangente a la curva $(x(t), y(t))$:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_\alpha^\beta ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = \int_\alpha^\beta \|(x'(t), y'(t))\|^2 dt$$

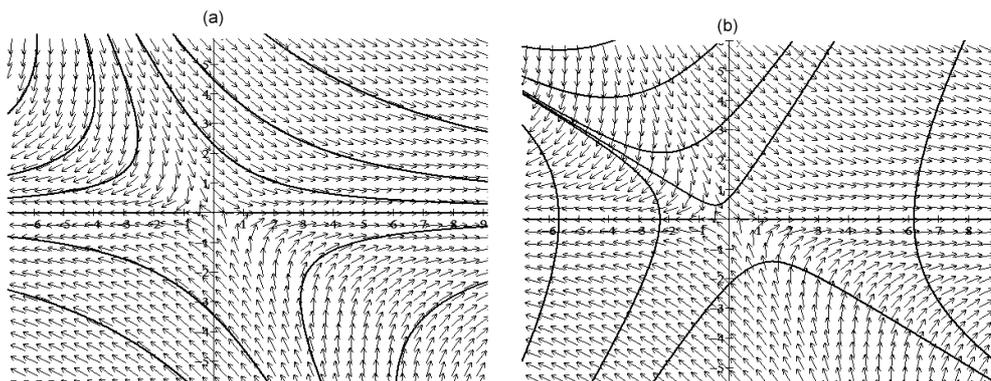


Figura 8.19: Trayectorias tangentes y perpendiculares

Ejercicio 8.11 Tomemos de nuevo una trayectoria L que sea una línea de fuerza del campo V . Por ejemplo, L puede ser cualquier trozo de curva de la Figura 8.19(a) trazada entre un par de puntos M y N . La pregunta es: ¿es L la trayectoria entre los puntos M y N tal que el trabajo realizado por V es máximo?

Ejercicio 8.12 Una hoja seca de árbol cae a un río y es transportada por la corriente. O una piedra rueda por el suelo arrastrada por el viento. Explica en estas situaciones el significado del campo de vectores, de la trayectoria y de la integral curvilínea.

Ejercicio 8.13 Supongamos ahora que la trayectoria L es perpendicular al campo $V = (X(x, y), Y(x, y))$. Es decir, la trayectoria $x(t), y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = -Y(x, y) \\ y'(t) = X(x, y) \end{cases}$$

Por ejemplo, L puede ser un fragmento de cualquiera de las curvas de la Figura 8.19(b) (que son perpendiculares en cada punto a las curvas de la Figura 8.19(a)). Ya sabemos que en este caso el trabajo realizado por la fuerza V es nulo, pero demuéstalo formalmente:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

Ejercicio 8.14 Piensa en algún ejemplo similar a los del ejercicio 8.10 en el que se dé esta situación (el río y una barca a motor o un pez...). Explica también en esa situación el significado del campo de vectores, de la trayectoria y de la integral curvilínea.

Ejemplo 8.6 El Maelstrom es un célebre gran torbellino marino que se forma en las costas meridionales del archipiélago noruego de las Lofoten. Se forma por la conjunción de las fuertes corrientes y contracorrientes de gran oleaje que atraviesan el estrecho, a lo largo de unos 18 Km. El topónimo Maelstrom deriva de la palabra compuesta neerlandesa malen (=triturar) y stroom (=corriente), es decir: “corriente trituradora”. Antiguamente muy peligroso para la navegación, las descripciones del Maelstrom realizadas por Edgar Allan Poe y Julio Verne lo pintan románticamente como un gigantesco vórtice circular que llega al fondo del océano.

El escritor y poeta estadounidense Edgar Allan Poe (1809-1849) relata en su cuento fantástico “Un viaje al Maelstrom” la terrorífica experiencia de un pescador atrapado por el remolino. El protagonista consigue sobrevivir, y cuenta:

”Mis cabellos, que la víspera eran tan negros como las plumas de un cuervo, están tan blancos como los ve usted ahora. Mis camaradas me aseguraron que mi rostro había variado completamente”

El novelista francés Julio Verne (1828-1905), relata en su célebre “20000 leguas de viaje submarino” cómo el Nautilus es atrapado por el gigantesco remolino, justo en el momento en que el profesor Annorax y sus compañeros, prisioneros del capitán Nemo, tratan de escapar de la nave a bordo de una frágil lancha:

”¡Maelstrom! ¡Maelstrom!- gritaban todos. ¡El Maelstrom! ¿Podía nombre más espantoso haber resonado en nuestros oídos en situación tan terrible? ¿Nos encontrábamos, pues, sobre aquellos peligrosos parajes de la costa noruega?”

Pues bien, en este ejemplo vamos a simular un Maelstrom. Observa el campo vectorial de la Figura 8.20(a) y la trayectoria de la Figura 8.20(b), que parte del punto $(0, 1)$ y se dirige en espiral hacia el punto de atracción $(0, 0)$. En cada punto (x, y) del plano, el vector que hemos utilizado ha sido $V = (8y - x, -8x - y)$. La trayectoria (línea de corriente o línea de fuerza) $(x(t), y(t))$ que pase por el punto $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ será siempre paralela a V , de modo que será la solución del problema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 8y - x \\y'(t) &= -8x - y \\x(0) &= 0, y(0) = 1\end{aligned}\tag{8.10}$$

Como ejercicio, demuestra que la solución del problema (8.10), que será la trayectoria fatal del Nautilus, es:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-t} \operatorname{sen}(8t) \\y(t) &= e^{-t} \operatorname{cos}(8t)\end{aligned}\tag{8.11}$$

Observa que, según este modelo, el Nautilus jamás llegaría al punto $(0,0)$ sino que describiría eternamente espirales cada vez más próximas al origen. Cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene $x(t) \rightarrow 0$ e $y(t) \rightarrow 0$.

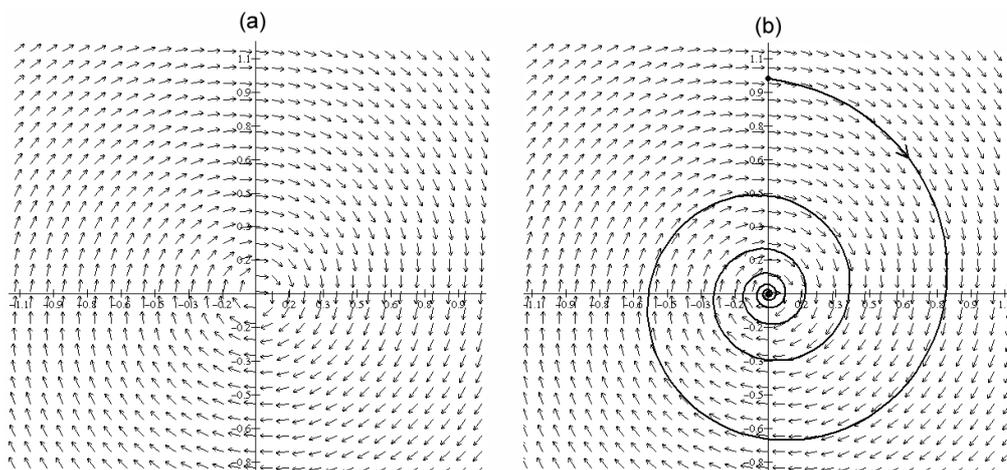


Figura 8.20: Maelstrom

¿Y cual es el trabajo realizado por la fuerza del Maelstrom desde $t = 0$ hasta un punto $t = p$ siguiendo la trayectoria fatal (8.11)? Según el ejercicio 8.10:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_\alpha^\beta ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt$$

$$W = \int_0^p ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 65 \int_0^p e^{-2t} dt = 32.5 (1 - e^{-2p})$$

El trabajo total realizado por un Maelstrom eterno sería $W(\infty) = 32.5$. En el intervalo $[0, 3]$ la fuerza realiza un trabajo $W(3) = 32.419$. Así pues, el 99.75 % del trabajo se realiza en el intervalo $[0, 3]$. La Figura 8.21 muestra la gráfica de $W(p)$. Como era de esperar, la gráfica es prácticamente plana a partir de $p = 3$.

Pero el Nautilus consigue escapar del Maelstrom, porque reaparece en la novela “La isla misteriosa”, del mismo autor. El Nautilus podría escapar de nuestro Maelstrom simulado logrando que el trabajo realizado por la fuerza del remolino $V = (8y - x, -8x - y)$ fuera nulo. Es decir, tendría que generar un campo de fuerzas U perpendicular a V , $U = (8x + y, 8y - x)$. Entonces, la trayectoria $(x(t), y(t))$ salvadora que seguiría el Nautilus desde un punto inicial (x_0, y_0) sería la solución del problema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 8x + y \\ y'(t) &= 8y - x \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{8.12}$$

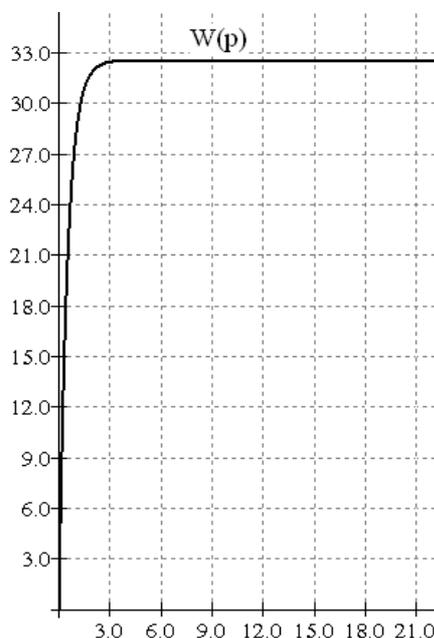


Figura 8.21: Trabajo del Maelstrom

La Figura 8.22(a) muestra la trayectoria fatal (8.11) “sumergida” en el campo de vectores salvador U . La Figura 8.22(b) muestra además algunas trayectorias salvadoras trazadas a partir de diversos puntos (x_0, y_0) pertenecientes a la trayectoria fatal, todas ellas son solución de (8.12). Como ejercicio, comprueba que la solución de (8.12) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{8t}(y_0 \operatorname{sen} t + x_0 \operatorname{cos} t) \\ y(t) &= -e^{8t}(x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \operatorname{cos} t) \end{aligned} \quad (8.13)$$

¿Y cual es el trabajo que debe realizar el Nautilus para salir del Maelstrom? El campo vectorial generado por la nave es $U = (8x + y, 8y - x)$ y las trayectorias vienen dadas por (8.12). Supongamos que la zona peligrosa es un círculo de radio 2 centrado en el origen, como aparece en la Figura 8.23. Vamos a calcular el trabajo realizado por el Nautilus para desplazarse desde diversos puntos iniciales $M(x_0, y_0)$ hasta llegar a la zona de seguridad.

Ver Figura 8.23. Supongamos que el punto inicial es $M(0.408, 0.853)$. La trayectoria salvadora, según (8.13) será:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{8t}(0.853 \operatorname{sen} t + 0.408 \operatorname{cos} t) \\ y(t) &= -e^{8t}(0.408 \operatorname{sen} t - 0.853 \operatorname{cos} t) \end{aligned}$$

El punto final es $N(1.031, 1.7414)$, que se alcanza para $t = 0.1$. El trabajo realizado por U puede evaluarse mediante Winplot o bien empleando el ejercicio 8.10:

$$W = \int_0^{0.1} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 14.36$$

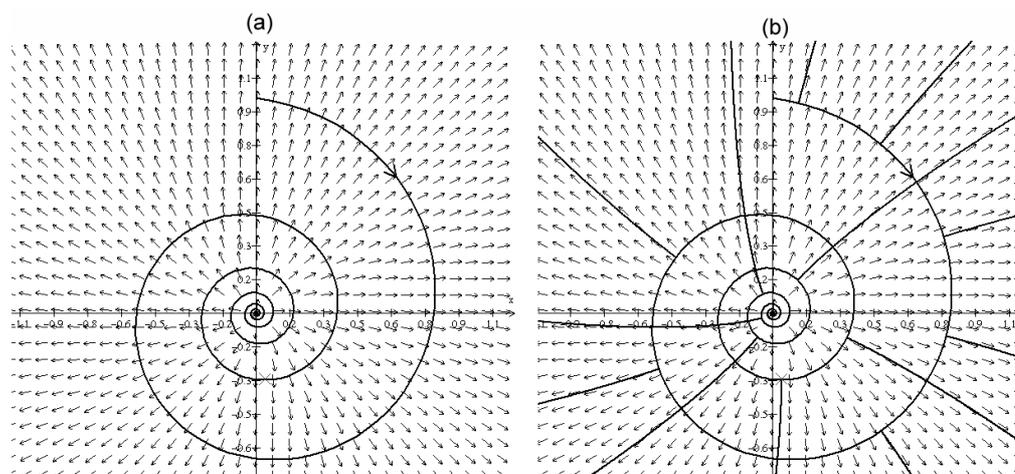


Figura 8.22: Maelstrom 2

Este valor es enorme, porque supone ¡el 44 % del trabajo que realizaría el Maelstrom en toda la trayectoria fatal!

Y ahora supongamos que el punto inicial es $M(0.163, 0.078)$. La trayectoria salvadora, según (8.13) será:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{8t}(0.078 \operatorname{sen} t + 0.163 \operatorname{cos} t) \\y(t) &= -e^{8t}(0.163 \operatorname{sen} t - 0.078 \operatorname{cos} t)\end{aligned}$$

El punto final es $N(1.978, 0.294)$, que se alcanza para $t = 0.3$. Por tanto, el trabajo realizado por U será:

$$W = \int_0^{0.3} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 15.98$$

El trabajo a realizar supone ahora el 49 % del trabajo que realizaría el Maelstrom en toda la trayectoria fatal. Del mismo modo, se comprueba que el trabajo realizado por el Nautilus al seguir a lo largo del intervalo de tiempo $[0, 0.746]$ la línea de fuerza de U que une los puntos $M(-0.005, -0.001)$ y $N(-1.7, 1.105)$ será $W = 16.15$, un 49.7 % del trabajo total que realizaría el Maelstrom.

Ejercicio 8.15 *Supongamos que el Nautilus no puede realizar el enorme trabajo necesario para salir del Maelstrom. El capitán Nemo decide entonces navegar en una trayectoria circular alrededor del origen y esperar a que el Maelstrom desaparezca.*

1. *Demuestra que el trabajo W que debe realizar el Nautilus para navegar siguiendo una trayectoria circular de radio R alrededor del origen y en el sentido de las agujas del reloj es proporcional al área del círculo.*

2. Demuestra que también el trabajo que realiza el Maelstrom a lo largo de la misma trayectoria es proporcional al área del círculo.
3. Supongamos que el trabajo que el Nautilus puede realizar en cada giro circular es $W = 6.28$. ¿Cuál es el radio R de la trayectoria que debe seguir el Nautilus? ¿Qué trabajo realizará el Maelstrom en cada giro?

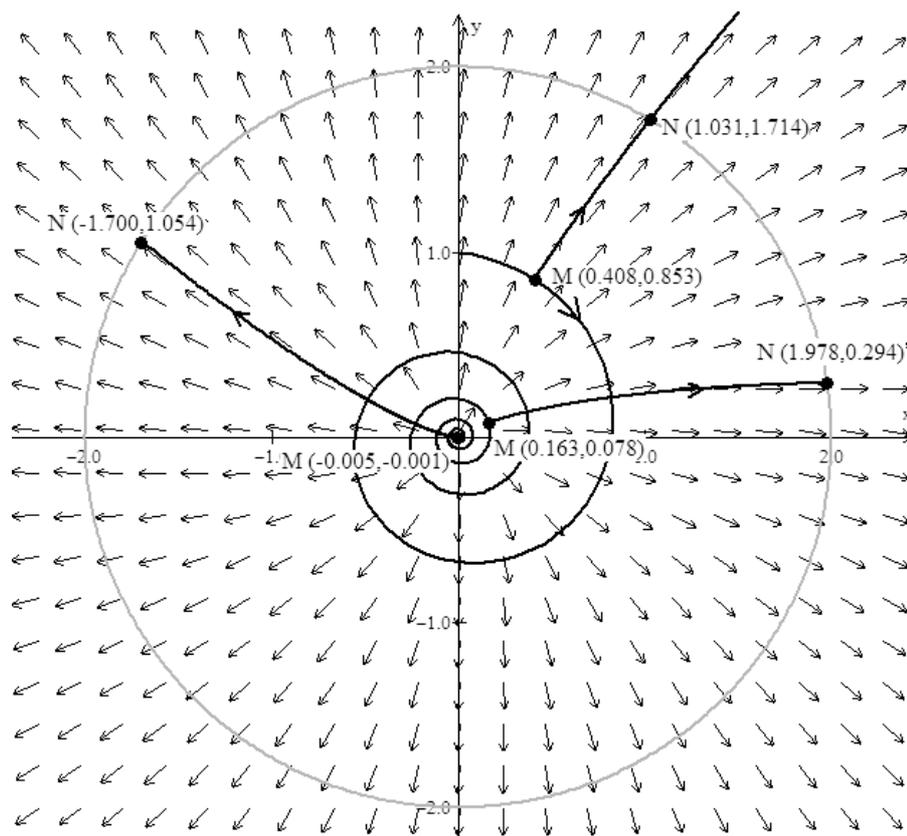


Figura 8.23: Trabajo del Nautilus

Ejemplo 8.7 Volvamos al campo gravitatorio del ejemplo 8.5. Allí construimos un modelo del campo de fuerzas gravitatorias V resultante de tres masas con funciones de potencial $F(x, y)$, $G(x, y)$, $H(x, y)$:

$$\begin{aligned} V &= \nabla(F + G + H) = \nabla(F) + \nabla(G) + \nabla(H) = \\ &= (F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y), F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y)) \end{aligned}$$

De modo que el campo U perpendicular a V será:

$$U = (-F_y(x, y) - G_y(x, y) - H_y(x, y), F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y)) \quad (8.14)$$

En consecuencia, para lograr que una partícula siga una trayectoria $(x(t), y(t))$ que no acabe estrellándose contra una de las masas, basta seguir una dirección perpendicular a (8.13), es decir, la curva $(x(t), y(t))$ verifica las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -F_y(x, y) - G_y(x, y) - H_y(x, y) \\y'(t) &= F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y)\end{aligned}\tag{8.15}$$

La Figura 8.24(a) muestra el campo U y la Figura 8.24(b) algunas soluciones del sistema (8.15). Todas ellas son órbitas estables que podría seguir un satélite artificial que orbite en el campo de fuerzas V . En todas ellas el trabajo efectuado por V es nulo.

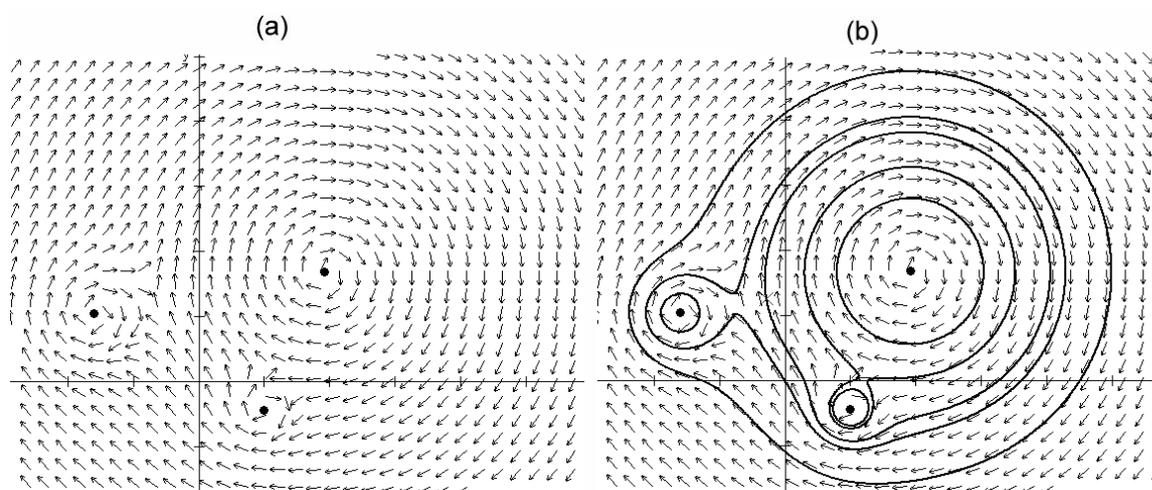


Figura 8.24: Campos gravitatorios

8.3. La integral curvilínea en el espacio

Exactamente las mismas ideas que hemos desarrollado para definir la integral curvilínea en el plano y calcular el valor del trabajo efectuado por una fuerza, se pueden aplicar en el espacio. Ahora el vector fuerza (campo vectorial) se expresará como $V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$, donde $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ son funciones definidas en un recinto R del espacio. La trayectoria L vendrá dada por una parametrización $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Como ejemplo, podemos construir un campo de vectores para modelizar el campo gravitatorio generado una masa M , como en el ejemplo 8.5, pero en el espacio en vez de en el plano. Definimos la función potencial del campo de gradientes:

$$F(x, y, z) = \frac{M}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Por tanto, el campo V de gradientes resultante es

$$V = \nabla(F) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

La Figura 8.25(a) (generada con Matlab) muestra el campo de gradientes de V para una masa $M = 1$ situada en el punto $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. En esta figura los vectores gradiente no están normalizados sino que aparecen con sus correspondientes módulos. Observa cómo el gradiente en cada punto se orienta hacia la posición $(1, 1, 1)$ donde está situada la masa, y su módulo crece a medida que el punto se aproxima a $(1, 1, 1)$. Además, en esta figura también aparece una posible trayectoria L , la curva helicoidal $x(t) = 0.3 \sin(t)$, $y(t) = 0.3 \cos(t)$, $z(t) = 0.1t$, $t \in [0, 12\pi]$. La Figura 8.25(b) muestra el campo vectorial $V = (-y, x, z)$. Ahora nos hacemos la misma pregunta que en el caso

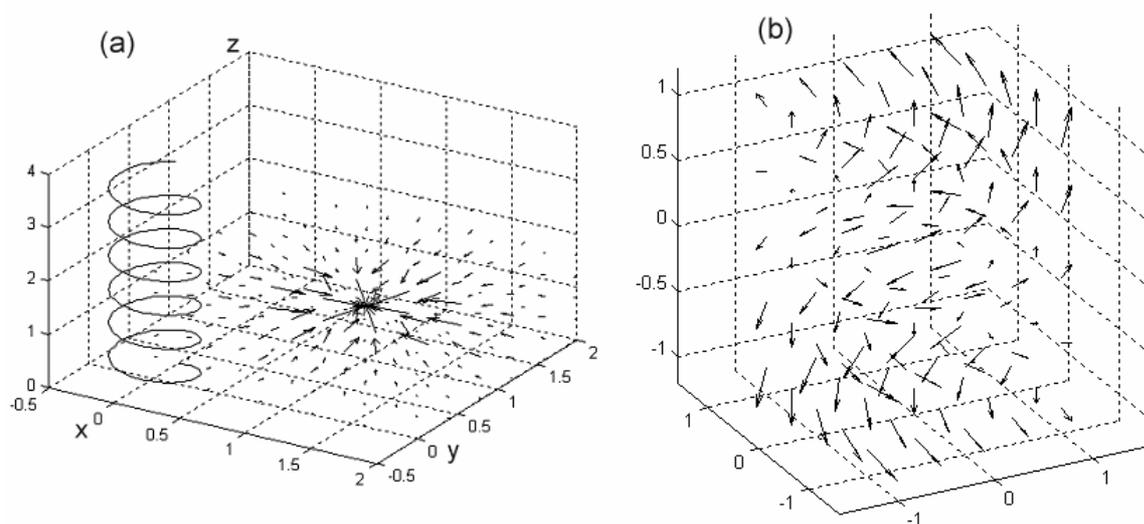


Figura 8.25: Campos en 3D

bidimensional: ¿cómo calcular el trabajo realizado por la fuerza V cuando una partícula se traslada entre dos puntos M hasta N ?

Ejercicio 8.16 Desarrolla formalmente todos los pasos que nos llevan a definir la integral curvilínea en tres dimensiones.

Un esquema del desarrollo es el siguiente:

1. Se tiene una fuerza $V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ definida en un recinto R del espacio. Una partícula describe una trayectoria L dentro del recinto R , dada por la parametrización $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, ver Figura 8.26(a). Se trata de calcular el trabajo que efectúa la fuerza V cuando la partícula se traslada por la trayectoria L desde el punto $M(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ hasta el punto $N(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$.

2. Dividimos L en n arcos y aproximamos la curva mediante una línea poligonal. La Figura 8.26(b) muestra una curva dividida en $n = 7$ arcos.
3. Tomamos un punto P_i de cada uno de los n arcos de curva. En cada punto P_i estará definido el vector fuerza V_i . La Figura 8.26(c) muestra una posible elección de siete puntos P_1, \dots, P_7 sobre L y los vectores V_1, \dots, V_7 .
4. Trabajamos con la aproximación poligonal en vez de con la curva L . Suponemos como aproximación que en cada segmento recto C_i de la línea poligonal, el vector fuerza es constante igual a V_i (Figura 8.26(d)).
5. En cada segmento recto C_i calculamos el trabajo W_i efectuado por la fuerza V_i (hemos supuesto que el vector fuerza es constante en ese segmento).
6. Sumamos los n valores de W_i . El resultado es una aproximación al valor W del trabajo total que estamos buscando, $W \approx W_1 + \dots + W_n$.
7. Hacemos que el número n de arcos tienda hacia ∞ , cuidando de que las longitudes de cada uno de ellos tienda hacia 0.
8. El valor buscado W será:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = \int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

9. Bajo condiciones suficientes:

$$\begin{aligned} & \int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt \end{aligned}$$

Ejercicio 8.17 Representa gráficamente la curva L definida por las condiciones $z = y^2$, $x = 2$, $y \in [1, 3]$. Calcula el valor de:

$$\int_L (x + y + z) dx + (-x + y - z) dy + (2x - y + z) dz$$

8.4. La integral curvilínea en un campo de gradientes

Muchos campos vectoriales $V = (X(x, y), Y(x, y))$ son el gradiente de cierta función. Esto quiere decir que existe una función real $F(x, y)$ tal que:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= F_x(x, y) \\ Y(x, y) &= F_y(x, y) \end{aligned}$$

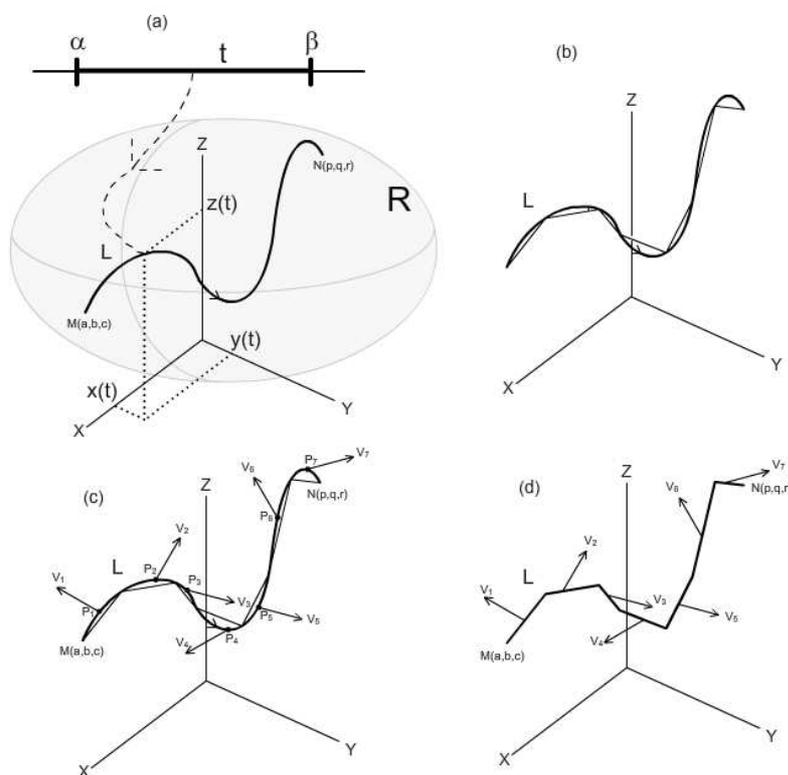


Figura 8.26: Troceamiento de curvas en el espacio

La función $F(x, y)$ se llama función de potencial del campo. Por ejemplo, si la función de potencial es $F(x, y) = x^2 + y^2$, el campo de gradientes será $V = (2x, 2y)$.

Un campo obtenido como el gradiente de una función $F(x, y)$ se llama campo conservativo. Dos ejemplos físicos importantes de campos conservativos son el campo gravitatorio y el campo eléctrico. En cambio, el campo magnético no es conservativo, es decir, no se forma mediante el gradiente de ninguna función de potencial $F(x, y)$.

Ejemplo 8.8 *Simular un campo eléctrico es tan sencillo como simular uno gravitatorio, pero ahora hay que tener en cuenta que la fuerza puede ser de atracción (cargas de distinto signo) o de repulsión (cargas de igual signo). Si V es el campo eléctrico generado por una carga C situada en el punto $M(a, b)$, la fuerza que actúa sobre una carga unitaria que esté situada en un punto $P(x, y)$ es proporcional a C e inversamente proporcional a la distancia entre P y M . De este modo, V se puede modelizar como el gradiente de la función de potencial:*

$$F(x, y) = \frac{C}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Observa que esta función es idéntica a las de nuestra simulación del campo gravitatorio

del ejemplo 8.5, pero el coeficiente C ahora puede ser positivo o negativo. De modo que un modelo para calcular la trayectoria $(x(t), y(t))$ que seguirá una carga “sumergida” en el campo V de gradientes de F será:

$$x'(t) = F_x(x, y)$$

$$y'(t) = F_y(x, y)$$

Reutilizando nuestro simulador del campo gravitatorio del ejemplo 8.5 podemos simular un campo eléctrico. Observa la Figura 8.27. Aparecen los campos generados por tres cargas C_1 , C_2 y C_3 cuyos módulos son $C_1 = 1.6$, $C_2 = 50$, $C_3 = 1.1$, pero no se conoce el signo de cada una. También se muestran algunas líneas de campo. ¿Eres capaz de identificar en cada caso el signo de C_1 , C_2 y C_3 , el signo de la carga unitaria “abandonada” en el campo y el sentido de recorrido de las curvas?

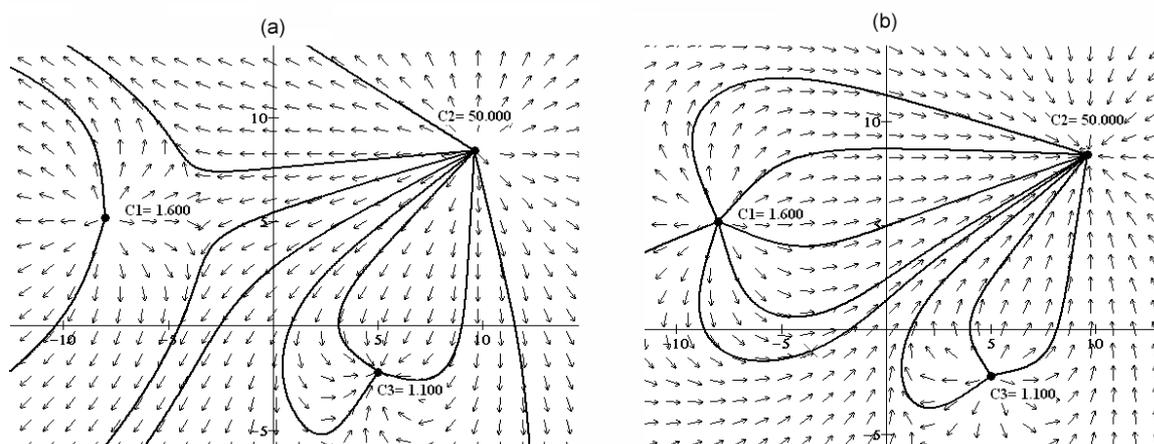


Figura 8.27: Campo eléctrico

Ahora vamos a suponer que una carga negativa C describe una trayectoria cualquiera dentro de este campo conservativo eléctrico V . Hemos representado en la Figura 8.28(a) el campo eléctrico y la curva L definida por $y = 0.04325(x+5)(x-5)(x-12)$, $x \in [-5, 12]$ que une los puntos $M(-5, 0)$ y $N(12, 0)$. Con Winplot hemos calculado el valor de la integral curvilínea (es decir, el trabajo W realizado por V cuando la carga C se traslada desde M hasta N siguiendo la trayectoria L). El valor es $W = -0.40958$.

Pero ahora viene lo curioso. Hemos repetido la operación para todas las parábolas que aparecen representadas en la Figura 8.28(b), que pasan también por M y N , y resulta que el valor de W es siempre el mismo, $W = -0.40958$.

Hemos hecho la misma operación, pero tomando algunas funciones de la familia de curvas $y = A(x+10)(x-15) + x$, $x \in [-10, 15]$ (A es un parámetro real), que pasan todas ellas por los puntos $M(-10, -10)$ y $N(15, 15)$. En la Figura 8.29 las hemos representado. Pues bien, el trabajo realizado por la fuerza es siempre $W = -0.59189$, sin importar de qué curva se trate.

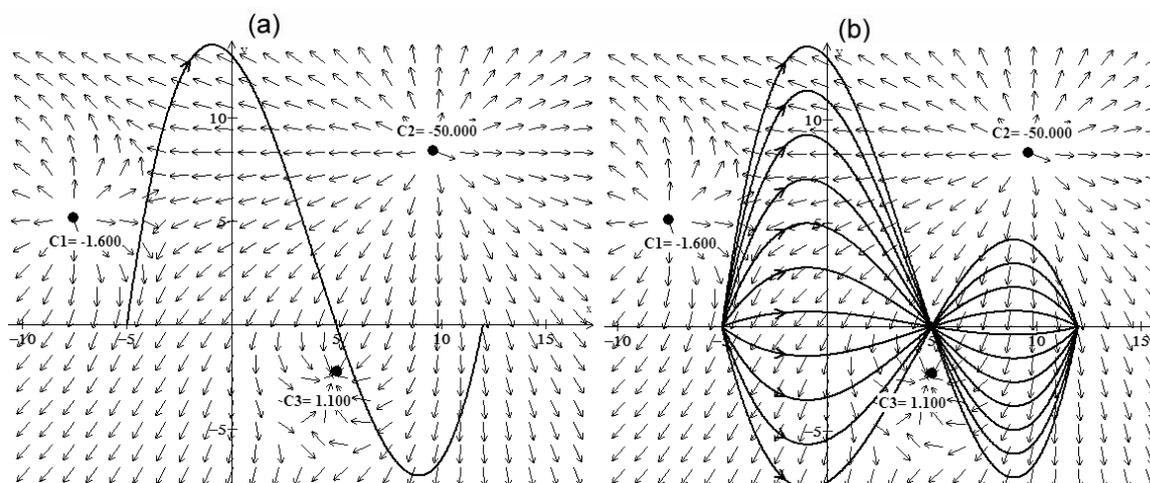


Figura 8.28: Familia de curvas en campo eléctrico

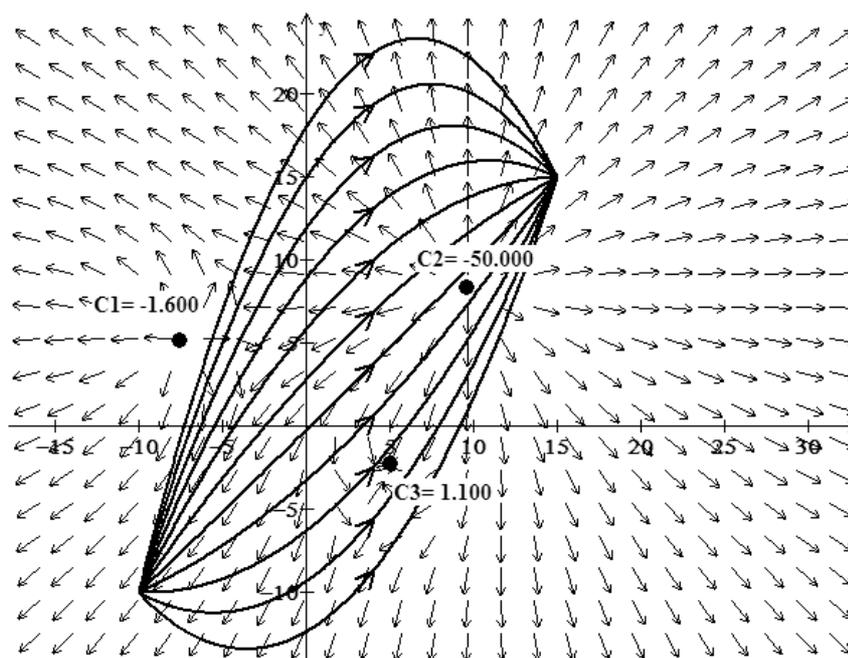


Figura 8.29: Familia de curvas en campo eléctrico 2

Es decir, parece que el valor de la integral curvilínea en este campo no depende de la trayectoria L que se siga, sino que depende sólo de los puntos inicial y final. ¿Será casualidad? ¿Ocurrirá sólo en los campos eléctricos? ¿O será una propiedad de TODOS los campos conservativos?

Ejercicio 8.18 Supongamos que la función de potencial de campo vectorial conservativo V es $F(x, y) = x^2 + xy$. Todas las curvas de la familia $y = A(x + 3)(x - 4) + x^2$ pasan por los puntos $M(-3, 9)$ y $N(4, 16)$.

1. Demuestra que el valor de la integral curvilínea desde M hasta N es independiente del valor del parámetro A .
2. Ahora toma una trayectoria cualquiera $x(t), y(t)$ entre los puntos M y N . ¿Cuanto vale la integral curvilínea? ¿Qué conjetura puedes formular a partir de este resultado?

Vamos a demostrar formalmente que esta propiedad es cierta para cualquier campo conservativo. Para ello vamos a calcular el valor de la integral curvilínea del campo conservativo $V = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ a lo largo de la curva L definida por $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, y demostrar que es independiente de la curva elegida.

El punto inicial será $M(x(\alpha), y(\alpha))$, y el punto final $N(x(\beta), y(\beta))$. Según el teorema 8.1:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Como $X(x, y) = F_x(x, y)$, $Y(x, y) = F_y(x, y)$:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Ahora basta recordar la regla de la cadena para la derivación de la función compuesta $F(x(t), y(t))$:

$$\frac{d}{dt} (F(x(t), y(t))) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t)$$

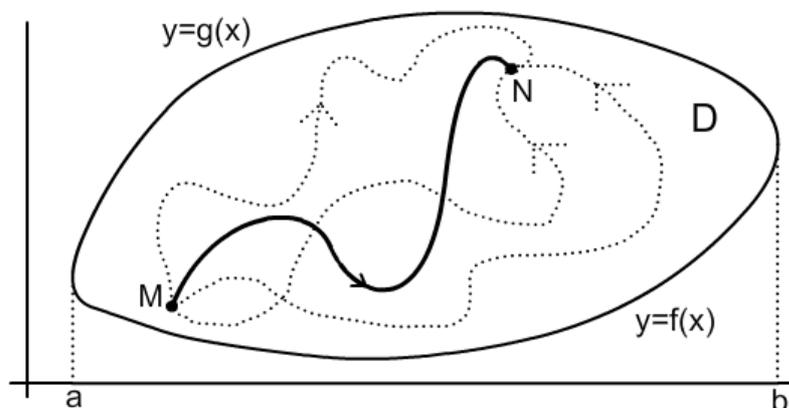
En consecuencia:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = F(x(t), y(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(x(\beta), y(\beta)) - F(x(\alpha), y(\alpha)) = F(N) - F(M)$$

Así pues, el valor de la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final M y N , su valor no depende de la trayectoria que se siga. Para calcular su valor, basta calcular la diferencia de potencial entre M y N . Vamos a enunciar formalmente este resultado:

Teorema 8.2 Sea D un recinto plano definido por dos funciones $f(x), g(x)$, ($f(x) \leq g(x)$) $x \in [a, b]$ (ver Figura 8.30). Supongamos que $F(x, y)$ es una función continua con derivadas parciales $F_x(x, y), F_y(x, y)$ continuas en D . Construimos el campo vectorial conservativo $V = (X(x, y), Y(x, y))$ cuya función de potencial es $F(x, y)$, es decir, $X(x, y) = F_x(x, y)$, $Y(x, y) = F_y(x, y)$. Supongamos que M y N son dos puntos cualesquiera contenidos en D y que L es cualquier curva continua contenida en D que sea derivable con derivada continua contenida (la Figura 8.30 muestra algunas posibles curvas). Entonces, el valor de la integral curvilínea del campo V desde M hasta N no depende de L y además:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = F(N) - F(M)$$

Figura 8.30: Curvas incluidas en D

Como consecuencia de este teorema, si se dan las condiciones suficientes, no hace falta especificar la curva L a lo largo de la cual se calcula la integral, basta indicar los puntos M y N . Por eso podemos denotar:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_M^N X(x, y) dx + Y(x, y) dy = F(N) - F(M) \quad (8.16)$$

Observa qué parecida es la relación (8.16) a la regla de Barrow que utilizamos para calcular la integral de una función real de una variable. En este caso, la “primitiva” será la función de potencial $F(x, y)$ y los “límites de integración” serán los puntos M y N . Además, la “primitiva” tampoco es única porque $F(x, y) + C$ también es función de potencial para cualquier constante C . Sin embargo, el cálculo de $F(N) - F(M)$ no se ve afectado por el valor de C (¿por qué?).

Ejercicio 8.19 Para el campo conservativo del ejercicio 8.18, calcular la integral curvilínea entre los puntos $M(-3, 9)$ y $N(4, 16)$, verificando el resultado que previamente habías obtenido en ese ejercicio.

Y ¿qué ocurre si en un campo conservativo calculamos la integral curvilínea a lo largo de una trayectoria cerrada, es decir, si $M = N$? En ese caso, la integral curvilínea se representa de la siguiente forma:

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

Como sentido de recorrido de la curva cerrada, salvo que se indique lo contrario, se considera el contrario al de las agujas del reloj.

Observa la Figura 8.31(a), hemos representado una trayectoria cerrada L contenida en D .

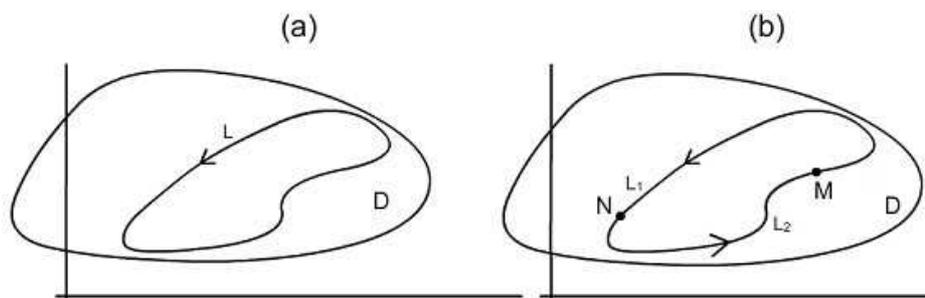


Figura 8.31: Descomposición de una curva cerrada L

Como aparece en la Figura 8.31(b), tomando dos puntos cualesquiera M y N de L , la curva L puede descomponerse en dos trayectorias L_1 y L_2 , de modo que:

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{L_1} X(x, y) dx + Y(x, y) dy + \int_{L_2} X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

Pero L_2 es una curva que une los puntos M y N , recorrida en sentido contrario a L_1 . Por tanto:

$$\int_{L_1} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = - \int_{L_2} X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

Así pues:

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{L_1} X(x, y) dx + Y(x, y) dy - \int_{L_1} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

Este resultado viene a significar que en un campo conservativo V , el trabajo realizado por la fuerza V cuando la partícula describe cualquier trayectoria cerrada es nulo. Vamos a enunciar este nuevo resultado:

Teorema 8.3 Si $V = (X(x, y), Y(x, y))$ es un campo conservativo y L es una trayectoria cerrada, entonces

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

El recíproco del teorema 8.3 también es cierto, es decir, se puede demostrar que si

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

para cualquier curva L contenida en un dominio D , entonces V es un campo conservativo, es decir, $Y_x(x, y) = X_y(x, y)$ en D .

En otras palabras: en un campo conservativo V , el trabajo realizado por V cuando la partícula describe cualquier trayectoria cerrada es nulo; y viceversa, si sabemos que el trabajo realizado por la fuerza V cuando la partícula describe cualquier trayectoria cerrada es nulo, entonces V es necesariamente un campo conservativo.

Ejercicio 8.20 La Figura 8.32 muestra seis imágenes de campos vectoriales. ¿Eres capaz de identificar cuáles de ellos son no conservativos?

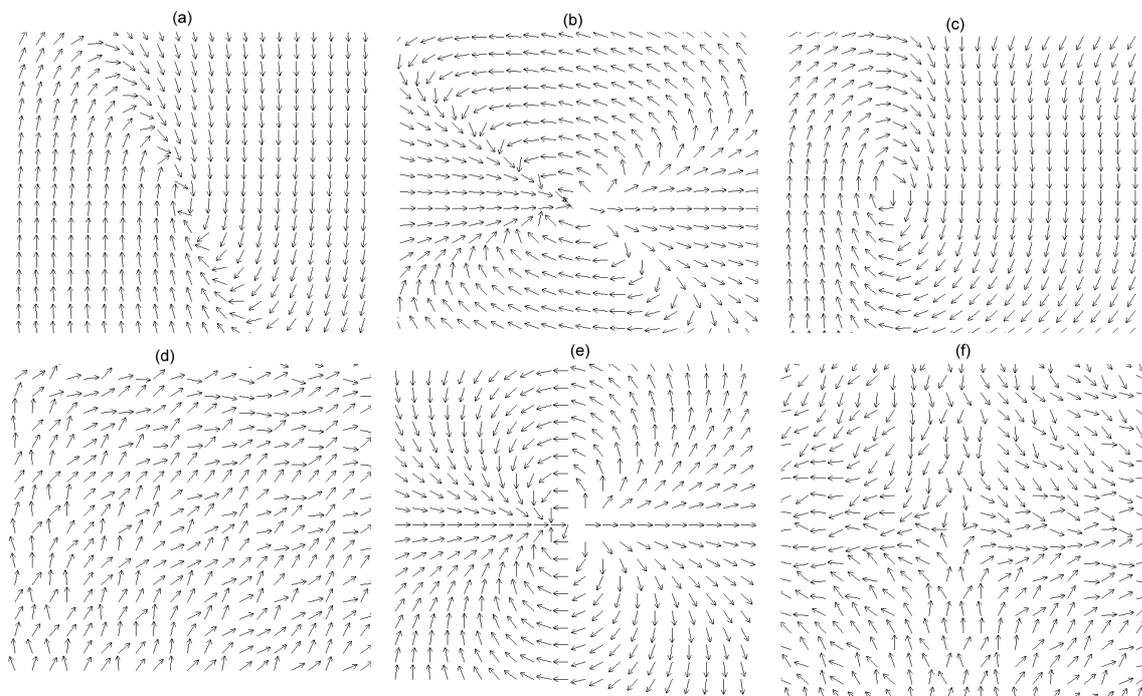


Figura 8.32: Distinción entre campos conservativos y no conservativos

Los teoremas 8.2 y 8.3 pueden simplificar mucho la tarea de calcular la integral curvilínea, en el caso de que el campo $V = (X(x, y), Y(x, y))$ sea conservativo con función de potencial $F(x, y)$. Si la curva L es cerrada, la integral es directamente nula. Y si no es cerrada, no hace falta tener en cuenta L , la integral es igual a la diferencia de potencial entre los puntos final e inicial, $F(N) - F(M)$.

El problema es que no siempre sabemos si el campo es conservativo. En general, se nos planteará el cálculo de una integral curvilínea de un campo $V = (X(x, y), Y(x, y))$ a lo largo de cierta trayectoria L pero sin saber en principio si es conservativo, es decir, no sabemos si existe una cierta función $F(x, y)$ tal que:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= F_x(x, y) \\ Y(x, y) &= F_y(x, y) \end{aligned} \tag{8.17}$$

¿Cómo podríamos reconocer si el campo $V = (X(x, y), Y(x, y))$ es conservativo? Vamos a suponer que existe tal función de potencial $F(x, y)$ que verifica (8.17). Derivando respecto

a y la primera ecuación y respecto a x la segunda:

$$\begin{aligned} X_y(x, y) &= F_{xy}(x, y) \\ Y_x(x, y) &= F_{yx}(x, y) \end{aligned} \quad (8.18)$$

Pero el teorema de Schwartz para funciones de dos variables nos indica que bajo ciertas condiciones $F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$, de modo que (8.18) equivale a

$$X_y(x, y) = Y_x(x, y) \quad (8.19)$$

Pues bien, la condición (8.19) sirve como test para determinar si el campo es conservativo. En el caso de que las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ verifiquen (8.19), entonces se trata de un campo conservativo, existe una función de potencial $F(x, y)$ que verifica (8.17). Vamos a enunciar este teorema, recordando las condiciones bajo las cuales puede aplicarse el teorema de Schwartz:

Teorema 8.4 *Sea D un recinto plano definido por dos funciones $f(x)$, $g(x)$, $x \in [a, b]$ (ver Figura 8.30). Supongamos que $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son funciones continuas con derivadas parciales continuas $X_y(x, y)$, $Y_x(x, y)$ en D . Entonces, existe una cierta función de potencial $F(x, y)$ tal que $X(x, y) = F_x(x, y)$, $Y(x, y) = F_y(x, y)$ si y solo si se cumple la siguiente condición: $X_y(x, y) = Y_x(x, y)$ en todos los puntos del dominio D .*

Ejercicio 8.21 *El cálculo de la función de potencial, si existe, puede hacerse sistemáticamente mediante simple integración. Supongamos que se trata de calcular:*

$$\int_{M(1,2)}^{N(3,4)} (2xy^2 + 1) dx + (2yx^2 - 1) dy$$

Verifica en primer lugar que se trata de un campo conservativo, empleando el test (8.19). Luego, sabiendo ya que existe una función de potencial $F(x, y)$ tal que $F_x(x, y) = 2xy^2 + 1$, $F_y(x, y) = 2yx^2 - 1$, piensa en algún procedimiento que te permita obtener $F(x, y)$. Luego, calcula el valor de la integral aplicando el teorema 8.2.

Ejemplo 8.9 *Hay que andar con pies de plomo a la hora de aplicar el teorema 8.4 para el cálculo de una integral curvilínea, porque tenemos que estar seguros de que TODAS las hipótesis de este teorema se cumplen. Supongamos que L es una circunferencia de radio R centrada en el origen. Calculemos la siguiente integral:*

$$\oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Comprobemos primero que el campo es conservativo:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2} & Y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ X_y &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ Y_x &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Así pues, parece que:

$$\oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

Ahora vamos a hacer el cálculo directo, utilizando la parametrización de la curva L , $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 \operatorname{sen}^2 t}{R^2} + \frac{R^2 \cos^2 t}{R^2} \right) dt = 2\pi \neq 0$$

¿Qué ocurre? Fíjate en que $X_y(x, y) = Y_x(x, y)$ en todos los puntos (x, y) del plano SALVO en $(0, 0)$. En este punto no existen $X(x, y)$, $Y(x, y)$. Si la curva L es, por ejemplo, la que aparece en la Figura 8.33(a), podemos “encerrar” L en un dominio D en el que se cumple $X_y(x, y) = Y_x(x, y)$. Pero, como aparece en la Figura 8.33(b), si la curva L es la circunferencia del enunciado, cualquier dominio D que tomemos va a contener al punto $(0, 0)$ y por tanto no podremos aplicar el teorema 8.4.

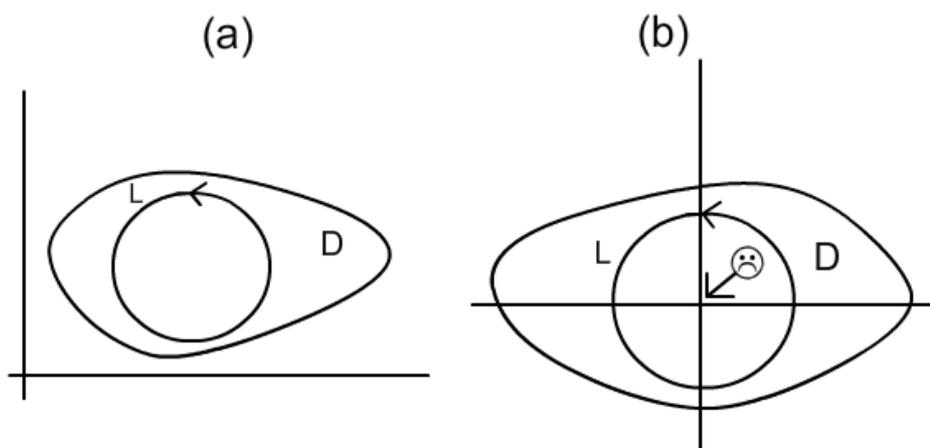


Figura 8.33: Discontinuidad en el origen

Estos resultados tienen su equivalente en el caso tridimensional. En este caso, comprueba como ejercicio que el campo $V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ es conservativo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} X_y(x, y, z) &= Y_x(x, y, z) \\ X_z(x, y, z) &= Z_x(x, y, z) \\ Y_z(x, y, z) &= Z_y(x, y, z) \end{aligned} \tag{8.20}$$

Bajo las condiciones (8.20), existe una función $F(x, y, z)$, llamada función de potencial

del campo, tal que

$$F_x(x, y, z) = X(x, y, z)$$

$$F_y(x, y, z) = Y(x, y, z)$$

$$F_z(x, y, z) = Z(x, y, z)$$

En este caso, el valor de la integral entre dos puntos M y N no depende de la trayectoria L que se siga, sólo depende de los puntos inicial M y final N . La figura 8.34 muestra algunas trayectorias posibles. El valor de la integral se calcula exactamente igual que en el caso bidimensional, es igual a la diferencia de potencial entre N y M :

$$\int_M^N X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = F(N) - F(M)$$

Naturalmente, si la trayectoria L es cerrada:

$$\oint_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = 0$$

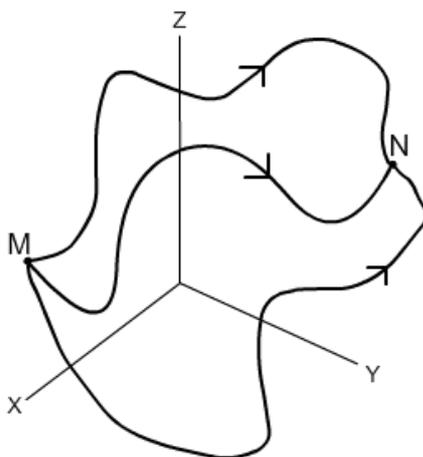


Figura 8.34: Independencia del camino en D

Ejercicio 8.22 *Calcular*

$$\int_{M(0,0,0)}^{N(1,1,1)} (2xy^2z^2 + y + z) dx + (2x^2yz^2 + x) dy + (2x^2y^2z + x - 1) dz$$

8.5. Fórmula de Green en el plano

El siguiente resultado nos da una interesante relación entre la integral curvilínea de una función vectorial $V = (X(x, y), Y(x, y))$ a lo largo de una trayectoria cerrada L y la integral doble de la función $G(x, y) = Y_x(x, y) - X_y(x, y)$ en el dominio D limitado por L . Es el llamado teorema de Green:

Teorema 8.5 (teorema de Green) . Sea D un recinto plano definido por las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, ($f(x) \leq g(x)$) $x \in [a, b]$ (ver Figura 8.35). Llamamos L a la curva cerrada L formada por ambas gráficas. Supongamos que las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ están definidas en D y son continuas con derivadas parciales continuas. Entonces:

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \iint_D (Y_x(x, y) - X_y(x, y)) dx dy$$

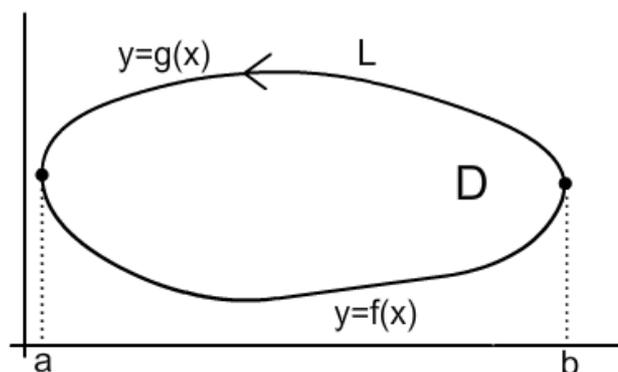


Figura 8.35: Dominio de integración D

En el siguiente ejercicio podrás comprobar cómo el cálculo de la integral curvilínea a lo largo de una trayectoria cerrada L puede resultar mucho más sencillo empleando el teorema de Green

Ejercicio 8.23 Supongamos que L es la curva que delimita la región D del primer cuadrante, acotada por las circunferencias de dentro el origen y radio 1 y 2 (ver Figura 8.36). Calcula:

$$\oint_L (e^x + 2xy) dx + (3x^2 + \cos y^3) dy$$

Ejercicio 8.24 Sabíamos que si un campo $V = (X(x, y), Y(x, y))$ es conservativo y L es una trayectoria cerrada, entonces:

$$\oint_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

Explica cómo este resultado se puede demostrar también empleando el teorema de Green.

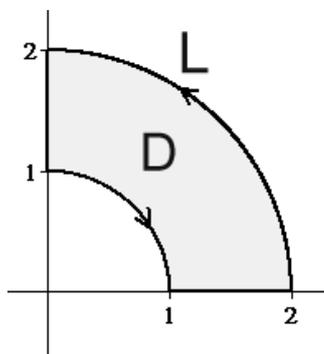


Figura 8.36: Corona circular

Ejercicio 8.25 Supongamos que tenemos un campo vectorial definido por la fuerza $V = (X(x, y), Y(x, y))$ tal que la diferencia $Y_x(x, y) - X_y(x, y)$ es constante. Supongamos que L es una trayectoria que limita un recinto plano D . Calcula en valor del trabajo realizado por V a lo largo de L .

8.6. Integral curvilínea respecto a la longitud del arco

Hemos estudiado el concepto de integral curvilínea de una función vectorial V a lo largo de una trayectoria L , tanto en el plano como en el espacio. Si V representa una fuerza aplicada en cada punto, el trabajo que realiza V cuando una partícula se desplaza desde un punto inicial M hasta un punto final N siguiendo la trayectoria L , es igual a la integral curvilínea de V a lo largo de L .

Hemos solucionado el problema del cálculo del trabajo, pero en Ciencias e Ingeniería hay otros problemas importantes que también involucran curvas. Por ejemplo, si la curva L representa un cable que tiene cierta densidad de masa en cada punto, ¿cuál será su masa total? ¿Y su centro de gravedad? ¿Y su momento de inercia respecto a un eje? En estos problemas en vez de tener una función vectorial $V(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ o $V(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ definida en una región R del espacio o del plano, lo que tenemos es una función escalar $F(x, y)$ o $F(x, y, z)$ que representa la distribución de masa en cada punto (x, y) o (x, y, z) de la curva L . Aquí vamos sólo a ocuparnos del cálculo de la masa, el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad y del momento de inercia respecto a un eje se propone como ejercicio.

Primero recordemos que en el Tema 5 (Integral de funciones de una variable), resolvimos en parte este problema. Vimos que si $y(x)$ representa la masa en cada punto x de una barra recta, entonces el valor M de la masa contenida en la barra es

$$M = \int_a^b y(x) dx \quad (8.21)$$

Observa la Figura 8.37. El intervalo $[a, b]$ se puede interpretar como una curva L a lo largo de la cual está definida una función de densidad de masa. La curva L se puede parametrizar

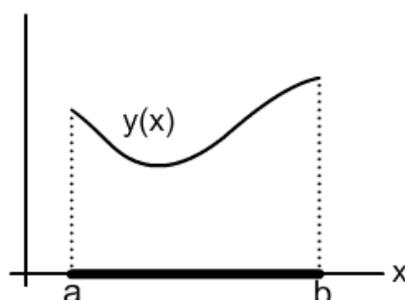


Figura 8.37: Masa de una barra

como $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $t \in [a, b]$. La función de densidad será $F(x, y) = y(x)$.

Vamos a resolver el problema de forma general. Supongamos que la función $F(x, y)$ representa la masa puntual en cada punto (x, y) de una curva L . Supongamos que $(x(t), y(t))$ $t \in [\alpha, \beta]$ es una parametrización de L . Se trata de investigar cómo calcular el valor de la masa total de L . Para ello vamos a utilizar un esquema muy parecido al que seguimos para resolver el problema del cálculo del trabajo.

1. Dividimos L en n arcos y aproximamos la curva mediante una línea poligonal. La Figura 8.38(a) muestra una curva dividida en $n = 7$ arcos. Tomamos un punto P_i de cada uno de los arcos, como parece en la Figura 8.38(b), y suponemos que la densidad puntual es constante e igual a $F(P_i)$ en todo el arco. Llamamos S_i a la longitud del correspondiente tramo recto de la poligonal. La Figura 8.38(c) muestra uno de los arcos, el punto $P_i(u_i, v_i)$ sobre dicho arco y el segmento recto C_i de longitud S_i . Como aparece en esta Figura 8.38(c), los extremos del arco son los puntos (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , siendo:

$$x_{i-1} = x(t_{i-1}), y_{i-1} = y(t_{i-1}), x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), u_i = x(r_i), v_i = y(r_i), i = 1, \dots, n$$

2. El valor aproximado M_i de la masa contenida en cada tramo C_i será igual a $M_i = F(x_i, y_i)S_i$. Si sumamos los n valores de M_i , el resultado es una aproximación al valor M de la masa total que estamos buscando, $M \approx M_1 + \dots + M_n$, o lo que es lo mismo:

$$M \approx \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \cdot S_i$$

La longitud S_i del tramo C_i es igual a

$$S_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

3. Aplicando el teorema del valor medio a las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, suponiendo como hipótesis que ambas son derivables, existen dos puntos c_i, d_i en el

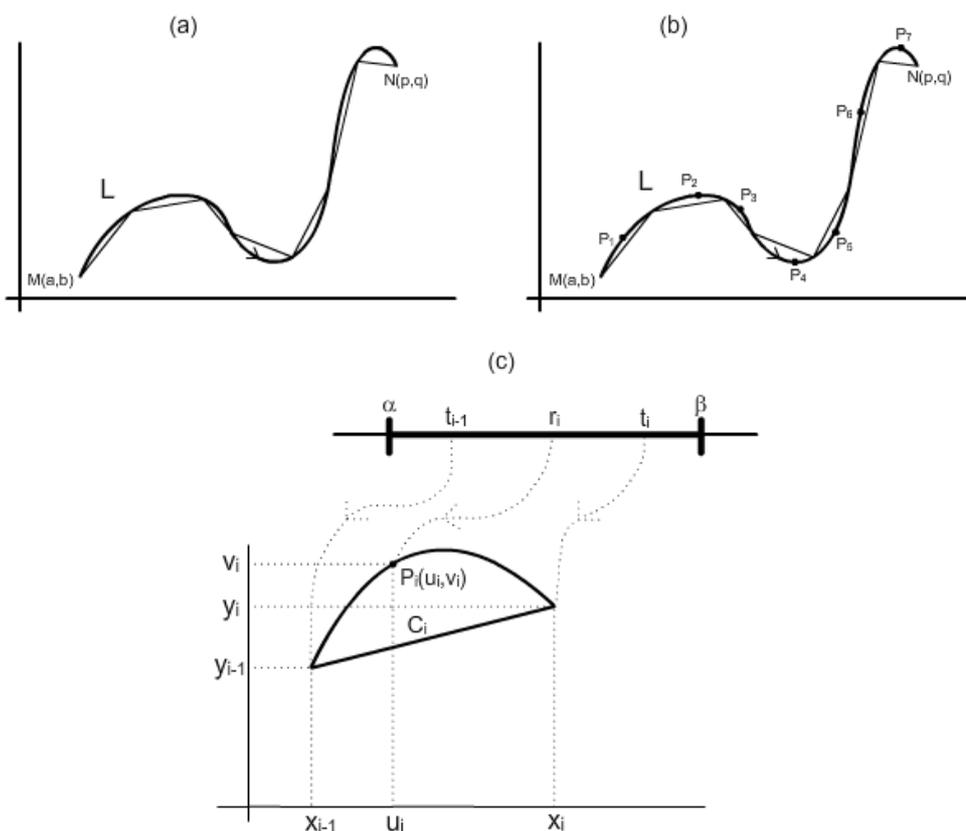


Figura 8.38: Integral curvilínea respecto al arco

intervalo (t_{i-1}, t_i) tales que:

$$x'(c_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad y'(d_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

Ahora suponemos que la longitud de cada subintervalo $h = t_i - t_{i-1}$ es tal pequeña que ambos puntos c_i, d_i se encuentran muy próximos, de modo que podamos considerarlos iguales:

$$S_i = \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

Por tanto:

$$M \approx \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \cdot \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

4. Pero el punto $P_i(u_i, v_i)$ es un punto arbitrario del tramo de curva, de modo que lo elegimos tal que $u_i = x(c_i)$, $v_i = y(c_i)$. Entonces:

$$M \approx \sum_{i=1}^n F(x(c_i), y(c_i)) \cdot \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

5. Hacemos que el número n de arcos tienda hacia ∞ ($h \rightarrow 0$). El valor buscado M será:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \cdot \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h \quad (8.22)$$

6. Ahora, si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y $F(x, y)$ es continua en un dominio que contenga a la curva L , reconocemos en la expresión (8.22) el concepto de integral de una variable:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \cdot \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (8.23)$$

Así pues, (8.23) nos permite calcular el valor de la masa contenida en L . Ya tenemos una nueva definición:

Definición 8.2 Llamamos *integral curvilínea respecto a la longitud del arco* al valor, si existe:

$$\int_L F(x, y) dt = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \cdot \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

Como acabamos de ver, bajo condiciones suficientes se tiene:

$$\int_L F(x, y) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Ejercicio 8.26 Supongamos que la densidad de masa en cada punto de L (x, y) es constante, es decir, $F(x, y) = k$. Evidentemente, la masa de L será igual a $k \cdot l$, siendo l la longitud de L . Demuestra que esto es cierto.

Ejercicio 8.27 Volvamos al caso de la barra unidimensional. Utilizando (8.23) demuestra la expresión particular de cálculo (8.21).

Exactamente de igual modo se construye la integral curvilínea respecto a la longitud del arco en el espacio, y se demuestra que:

$$\int_L F(x, y, z) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

Ejercicio 8.28 Ver Figura 8.39. Calcula el valor de la masa del muelle $x(t) = 0.5 \cos 2t$, $y(t) = 0.5 \sin 2t$, $z = t$, $t \in [0, 6\pi]$, si la densidad puntual viene dada por $F(x, y, z) = x + y + z$. La Figura 8.39(a) muestra el muelle y la 8.39(b) la masa en cada punto del mismo, es decir, hemos representado la función $F(x(t), y(t), z(t)) = 0.5(\cos 2t + \sin 2t) + t$, $t \in [0, 6\pi]$.

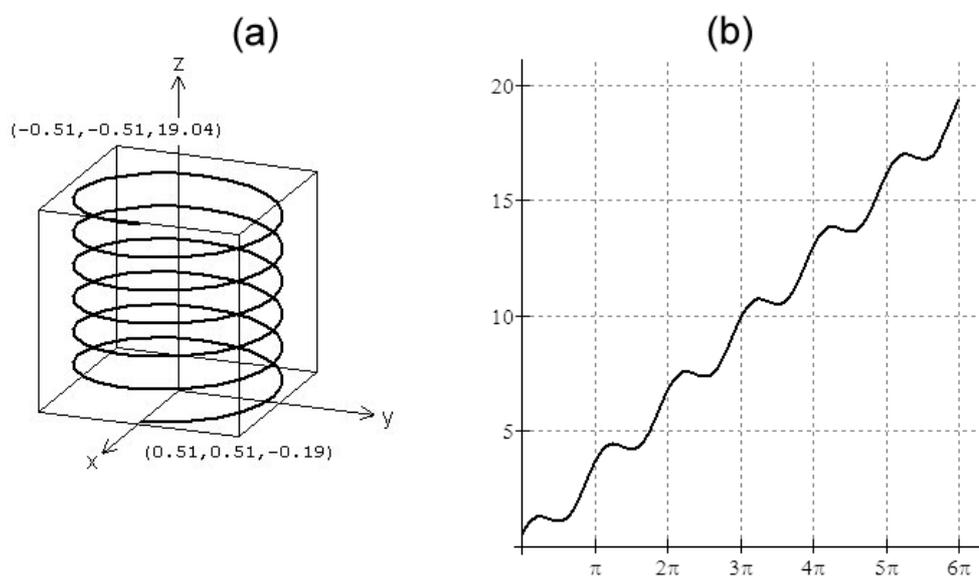


Figura 8.39: Masa del muelle