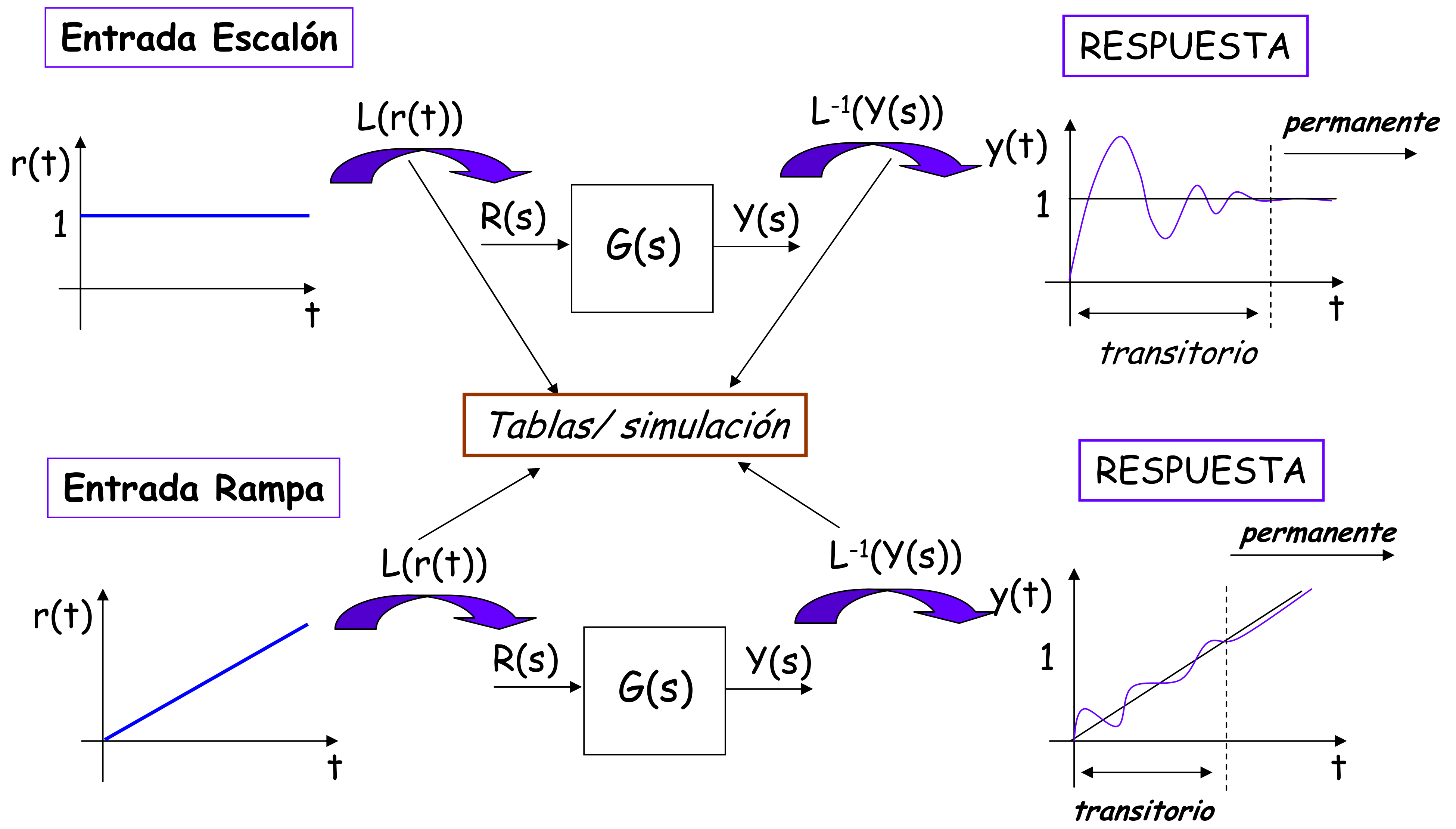
Tema 4
Respuesta transitoria y permanente. Estabilidad


Entrada Escalón
r(t)
1
t
L(r(t))
R(s)
G(s)
Y(s)
L-1(Y(s))
RESPUESTA
y(t)
permanente
1
t
transitorio
Tablas/ simulación
Entrada Rampa
r(t)
t
L(r(t))
R(s)
G(s)
Y(s)
L-1(Y(s))
RESPUESTA
permanente
y(t)
1
t
transitorio

RESPUESTA TRANSITORIA

Para analizar la respuesta de un sistema, debemos definir que entrada se le aplica (escalón, rampa, parabólica...) y que tipo de sistema es. Podemos distinguir tres tipos de sistemas en cuanto a su **numero de polos** (polos= raíces del denominador de la función de transferencia), tenemos:

1) SISTEMAS DE 1er ORDEN. Numero de polos n=1

$$G(s)=\frac{k}{T\,s+1}$$

2) SISTEMAS DE 2° ORDEN. Numero de polos n=2

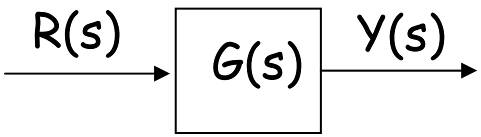
$$G(s)=\frac{k\,w_n^2}{s^2+2\partial\,w_n\,s+w_n^2}$$

3) SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR.

Numero de polos n>2, y n>m

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0\,s^m+b_1 s^{m-1}+\dots+b_{m-1}s+b_m}{a_0\,s^n+a_1 s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

SISTEMA DE 1er ORDEN



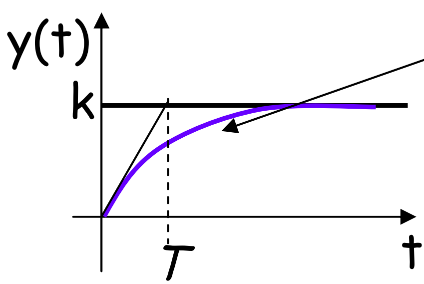
$$G(s)=\frac{k}{T\,s+1}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{K= ganancia del sistema}\\ \text{T= constante de tiempo}\\ \text{Polo en -1/T}\end{array}\right.$$

Supongamos entrada escalón unitario R(s)=1/s, la respuesta y(t) seria:

$$Y(s)=R(s)\frac{k}{T\,s+1}=\frac{1}{s}\frac{k}{T\,s+1}\xrightarrow[\text{de Laplace}]{\text{Transformada Inversa}}y(t)=k\boxed{-k\,e^{-\frac{t}{T}}}$$

respuesta transitoria

Si T>0, entonces:



Conclusiones:

1) K es el valor final del sistema (t=∞), para T>0

2) Si T aumenta el sistema responde mas lentamente

SISTEMA DE 2° ORDEN

$$G(s) = \frac{k\,w_n^2}{s^2 + 2\partial\, w_n\, s + w_n^2}$$

K= Ganancia del sistema

δ= Coef. de amortiguamiento

Wn=Frecuencia natural

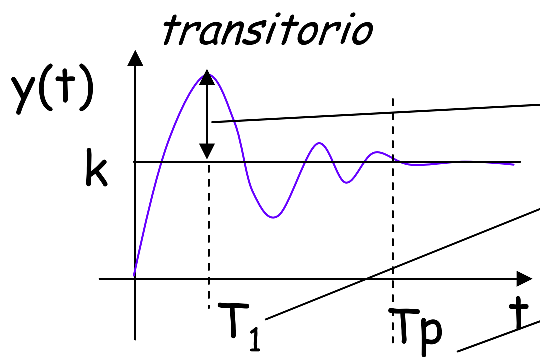
polos $s = -\partial\, w_n \pm w_n \sqrt{1-\partial^2}\; j$

Supongamos entrada escalón unitario **R(s)=1/s y 0<δ<1**, la respuesta y(t) seria:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{k\,w_n^2}{s^2 + 2\partial\, w_n\, s + w_n^2} \;\Longrightarrow\; y(t) = k \underbrace{- k\,\frac{e^{-\partial\, w_n\, t}}{\sqrt{1-\partial^2}}\, \sin\!\left(w_n\sqrt{1-\partial^2}\; t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\partial^2}}{\partial}\right)}_{\textit{respuesta transitoria}}$$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Sistema **Subamortiguado** o con oscilaciones amortiguadas



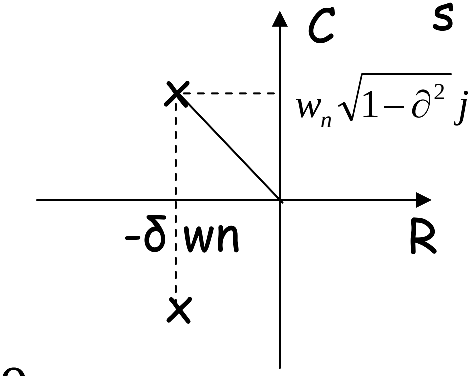
REBOSE

TIEMPO DE PICO

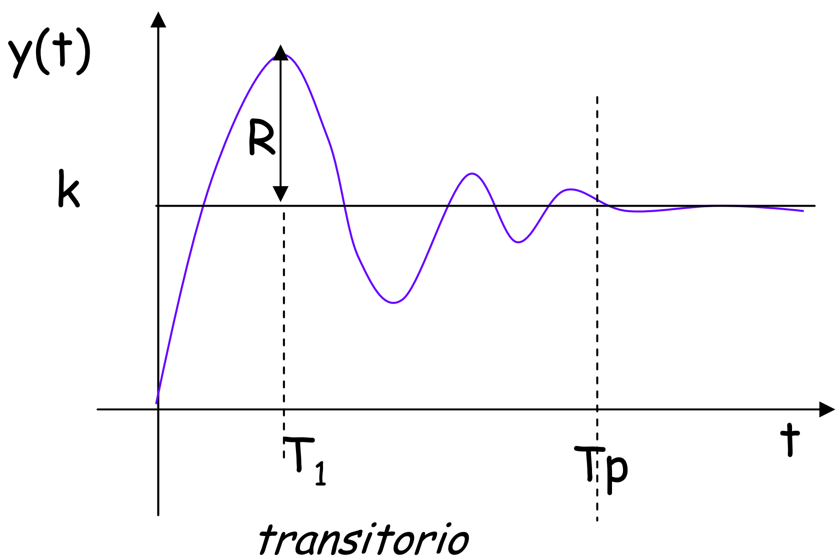
TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO

SISTEMA DE 2° ORDEN

$$G(s) = \frac{k\, w_n^2}{s^2 + 2\partial\, w_n\, s + w_n^2} \qquad s = -\partial\, w_n \pm w_n \sqrt{1-\partial^2}\, j$$



REBOSE ⟶ $R(\%) = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\partial^2}}} x100 = \frac{y_{\max}(t) - y_{final}(t)}{y_{final}(t)} x100$



TIEMPO DE PICO ⟶ $t_1 = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\partial^2}}$

TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO ⟶

$$\begin{cases} t_{p(5\%)} = \dfrac{3}{w_n \partial} \\ t_{p(2\%)} = \dfrac{4}{w_n \partial} \end{cases}$$

SISTEMA DE 2° ORDEN CON CEROS Y POLOS AÑADIDOS

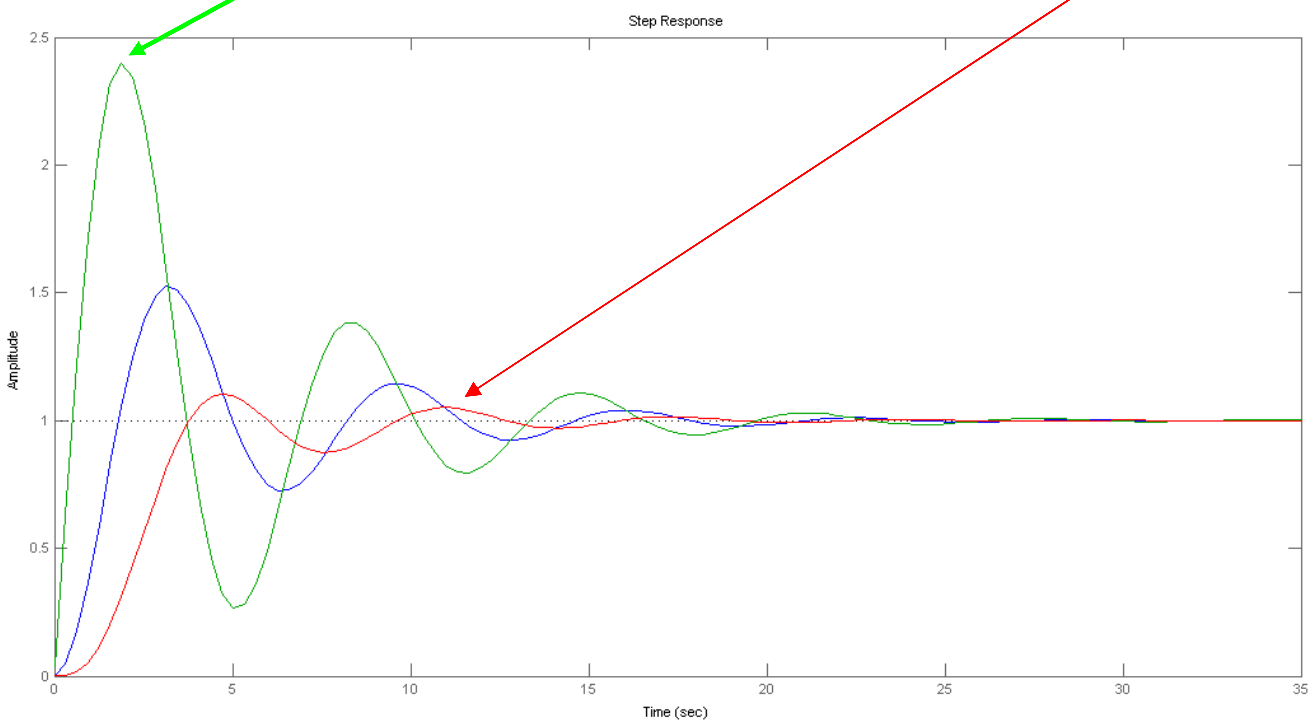
Escalón unitario **R(s)=1/s y 0<δ<1**:

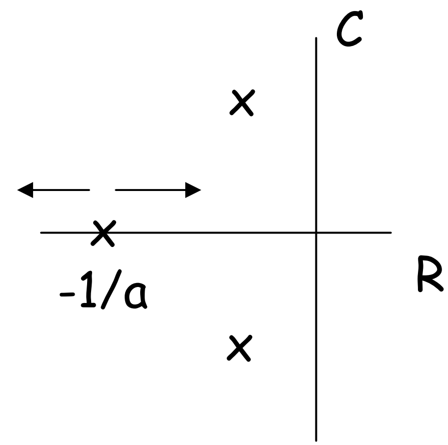
Cero añadido

$$G(s)=\frac{k\,w_n^2(1+as)}{s^2+2\partial\,w_n\,s+w_n^2}$$

Polo añadido

$$G(s)=\frac{k\,w_n^2}{(s^2+2\partial\,w_n\,s+w_n^2)(1+as)}$$





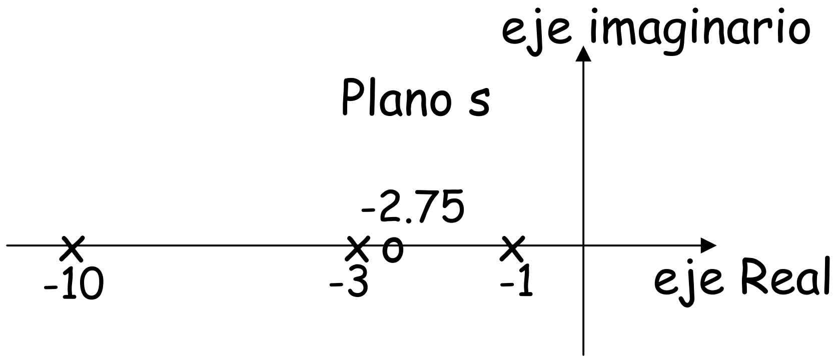
SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

Para el estudio teórico de la respuesta tanto transitoria como permanente de los sistemas de orden superior, es necesario realizar fundamentalmente dos aproximaciones, mediante las cuales reduciremos el sistema a uno de 1er o 2º orden.

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema G(s):

$$G(s) = \frac{s+2.75}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$



Podemos realizar dos simplificaciones:

1) Despreciar el polo en -10 por estar muy alejado del -1, que es el polo dominante.

2) Anular el polo en -3 con el cero -2.75 por su cercanía.

$$G(s) = \frac{0.092}{(s+1)}$$

Se reduce a un sistema de 1er orden

Nota: se puede comprobar que en el caso de una entrada escalón unitaria los dos sistemas tienden a 0.092 (Teorema del valor final)

Ejemplo: SISTEMA DE ORIENTACION

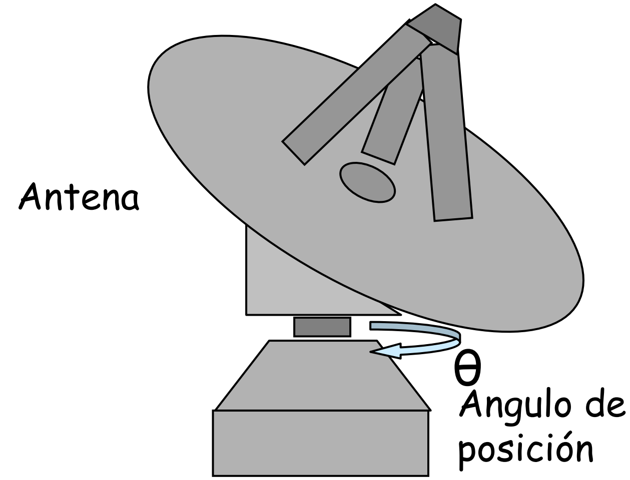
$$J\ddot{\vartheta}(t) + B\,\dot{\vartheta}(t) = e(t)Km$$

$$G(s) = \frac{\vartheta(s)}{E(s)} = \frac{Km}{s(Js+B)}$$

$J = 12\ m^2\ kg$

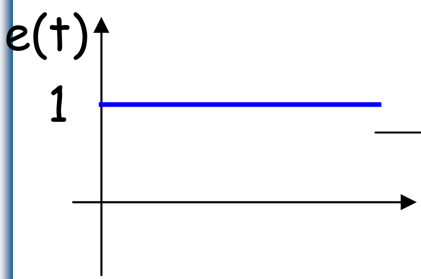
$B = 14\ m^2\ kg/s$

$Km = 10.5 m^2\ kg/s^2$

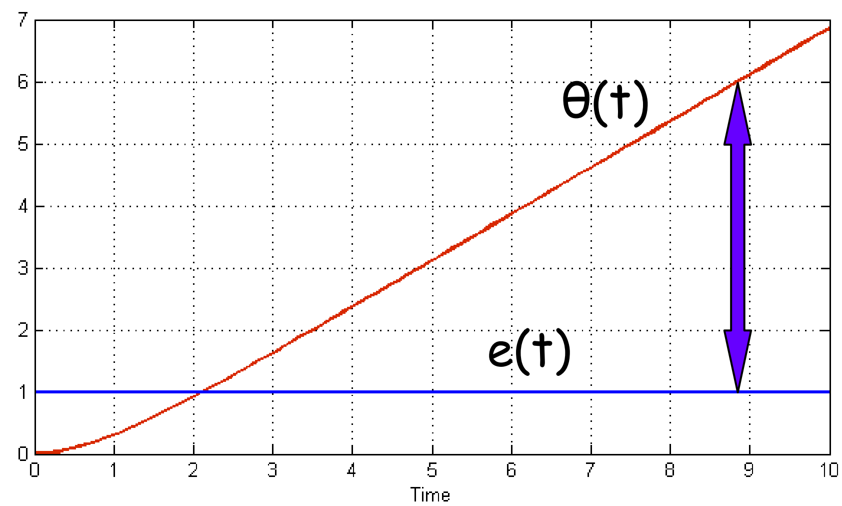


Entrada Escalón

E(s)=1/s



$$E(s) \longrightarrow \boxed{\frac{10.5}{s(12s+14)}} \longrightarrow \theta(s)$$

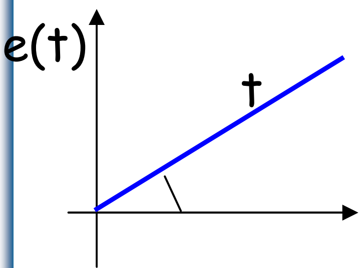


Programa en MATLAB:

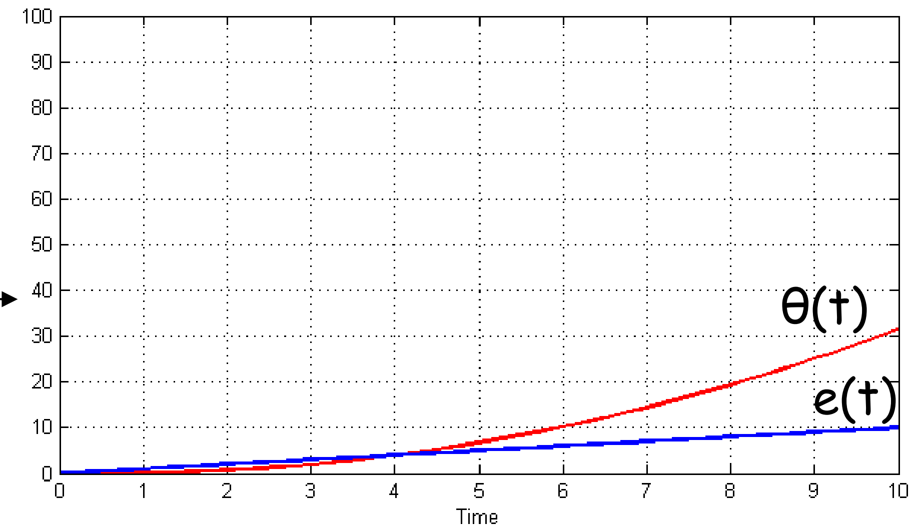
```
G=tf(10.5,[12,14,0])
step(G)
```

Ejemplo: SISTEMA DE ORIENTACION

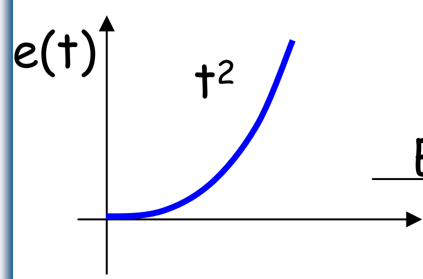
Entrada Rampa $E(s)=1/s^2$



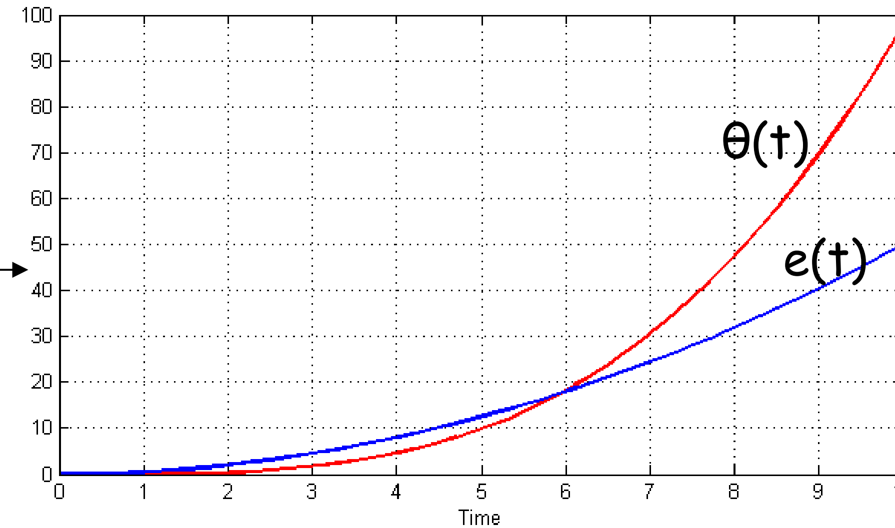
$$E(s) \longrightarrow \boxed{\frac{10.5}{s(12s+14)}} \longrightarrow \theta(s)$$



Entrada Parabólica $E(s)=1/s^3$

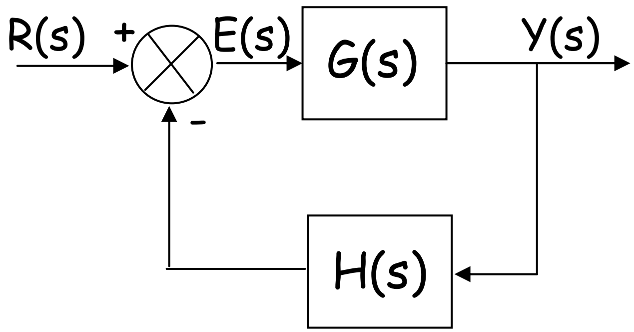


$$E(s) \longrightarrow \boxed{\frac{10.5}{s(12s+14)}} \longrightarrow \theta(s)$$



RESPUESTA PERMANENTE

Consideremos el siguiente sistema realimentado. Para analizar la respuesta en **régimen permanente** es necesario el estudio de los **errores** (E(s)) que se producen cuando al sistema se le aplica una entrada.



$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \end{aligned}\right\} G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+\boxed{G(s)H(s)}}$$

Función de Transferencia en lazo cerrado $G_{LC}(s)$

Función de Transferencia en lazo Abierto $G(s)H(s)$

Función de Transferencia del Error E(s)

$$\boxed{E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

Se define el **error en régimen permanente** como:

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)} = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \boxed{\lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

Coeficientes estáticos de error: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$

Coef. de error Posición kp:

R(s)=1/s $\quad e_{ss} = \lim_{s\to 0}\dfrac{1}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{1}{1+K_p} \longrightarrow kp = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$

Coef. de error Velocidad:

R(s)=1/s² $\quad e_{ss} = \lim_{s\to 0}\dfrac{1/s}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{1}{K_v} \longrightarrow kv = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s)$

Coef. de error aceleración:

R(s)=1/s³ $\quad e_{ss} = \lim_{s\to 0}\dfrac{1/s^2}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{1}{K_a} \longrightarrow ka = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)H(s)$

Tipo de sistema:

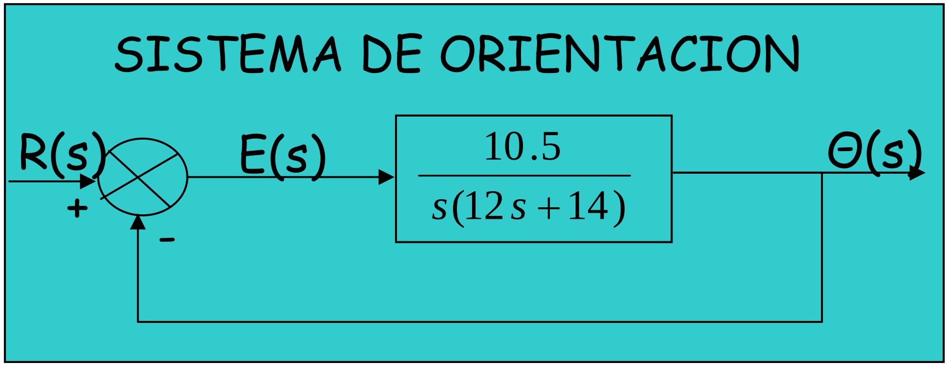
j=nº de polos en el origen

$$G(s)H(s) = \frac{k(c_1 s+1)\ldots(c_m s+1)}{s^j (p_1 s+1)\ldots(p_{n-j} s+1)}$$

j\ R(s)	1/s	1/s²	1/s³
j= 0	$\frac{1}{1+Kp}$	∞	∞
j= 1	0	$\frac{1}{Kv}$	∞
j= 2	0	0	$\frac{1}{Ka}$
j>= 3	0	0	0

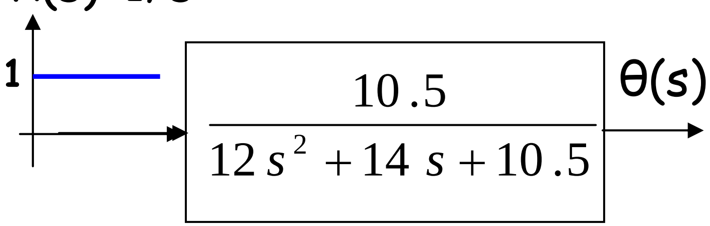
Tema 4. Respuesta transitoria y permanente. Estabilidad

Análisis de respuesta permanente



Entrada Escalón

R(s)=1/s

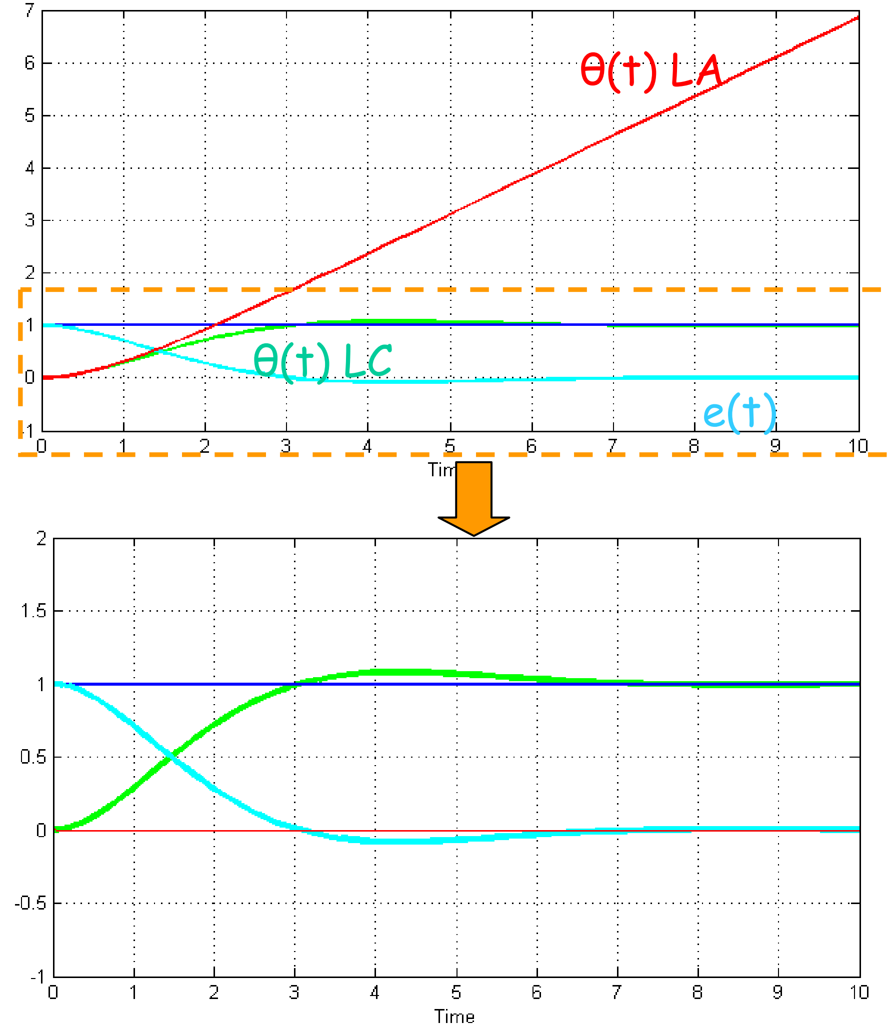


VALOR FINAL:

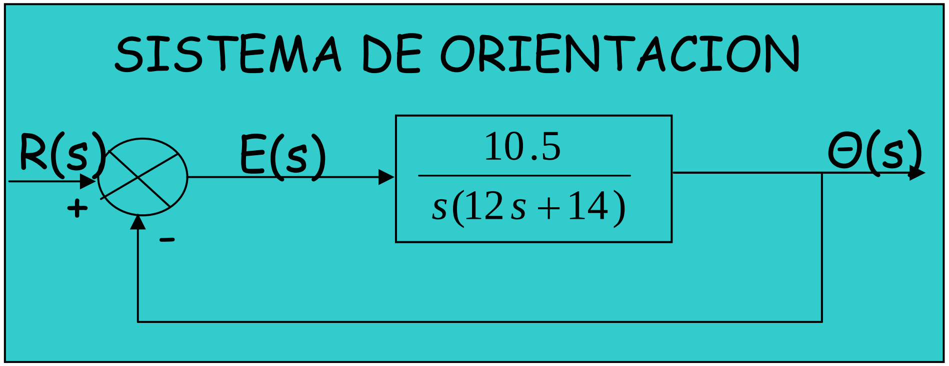
$$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = \lim_{s\to 0} s\,\vartheta(s) = \lim_{s\to 0} s\,R(s)G_{LC}(s) = 1$$

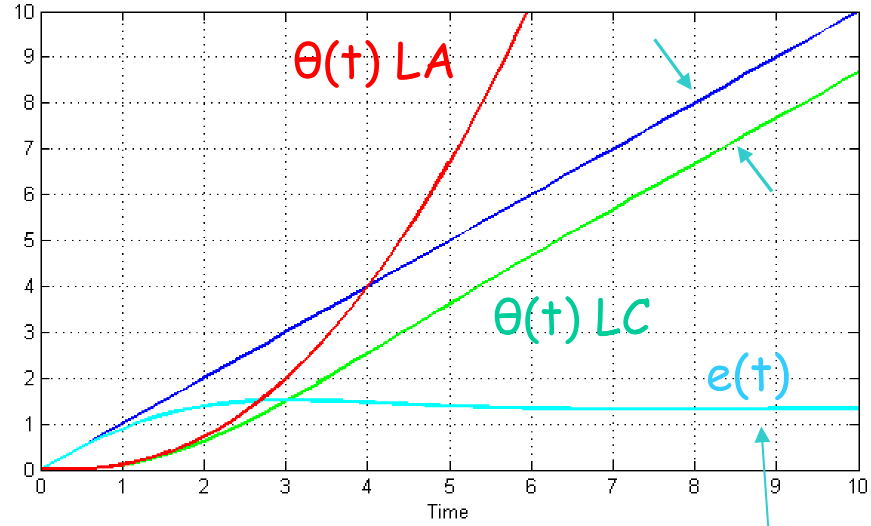
ERROR (permanente):

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = 0$$



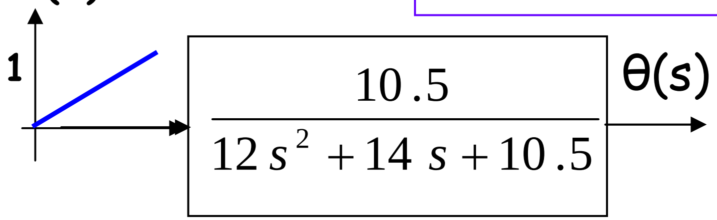
$$G_{LC}(s) = \frac{\vartheta(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{10.5}{12s^2+14s+10.5}$$





Entrada Rampa

$R(s)=1/s^2$

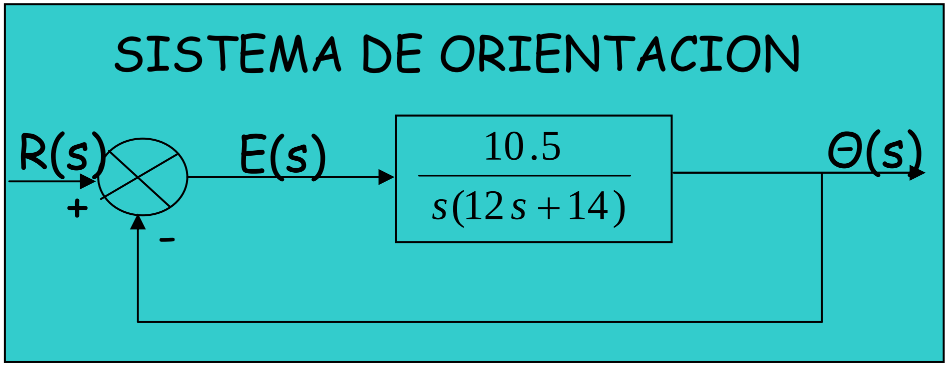


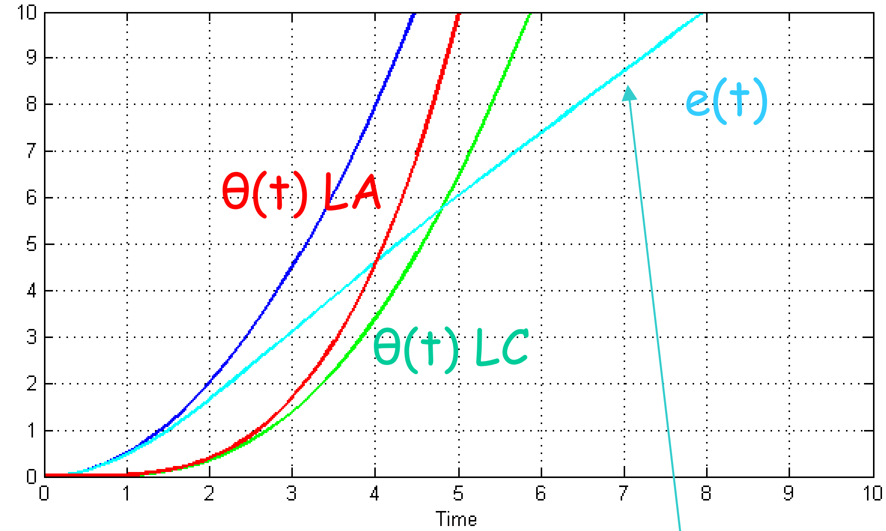
ERROR de Seguimiento:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1/s^2}{1+\dfrac{10.5}{s(12s+14)}} = \frac{14}{10.5} = \boxed{1.33}$$

VALOR FINAL:

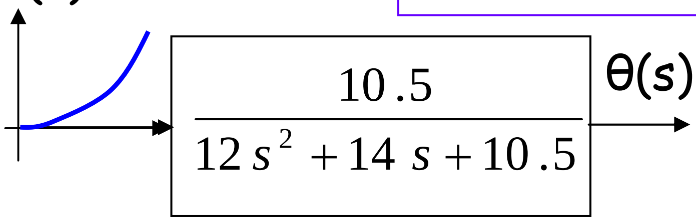
$$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = \lim_{s\to 0} s\,\vartheta(s) = \lim_{s\to 0} s\,R(s)G_{LC}(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s^2}\,\frac{10.5}{12s^2+14s+10.5} = \infty$$





$R(s)=1/s^3$

Entrada Parabólica



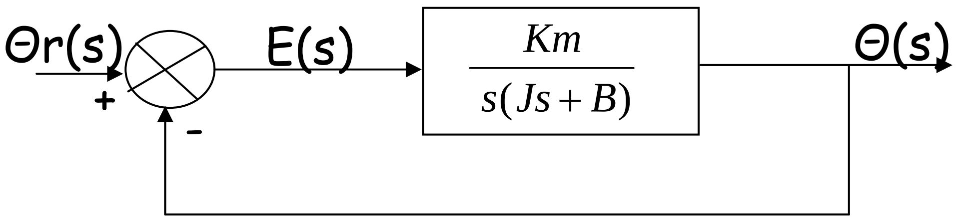
ERROR de Seguimiento:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1/s^3}{1+\frac{10.5}{s(12s+14)}} = \boxed{\infty}$$

VALOR FINAL:

$$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = \lim_{s\to 0} s\,\vartheta(s) = \lim_{s\to 0} s\,R(s)G_{LC}(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s^3}\,\frac{10.5}{12s^2+14s+10.5} = \infty$$

SISTEMA DE ORIENTACION: Descomposición en fuerzas



$$G_{LC}(s) = \frac{\vartheta(s)}{\vartheta_r(s)} = \frac{Km}{s(Js+B)+Km}$$

$$Js^2\,\theta(s) + B\,s\,\theta(s) + Km\,\theta(s) = \vartheta_r(s)Km$$

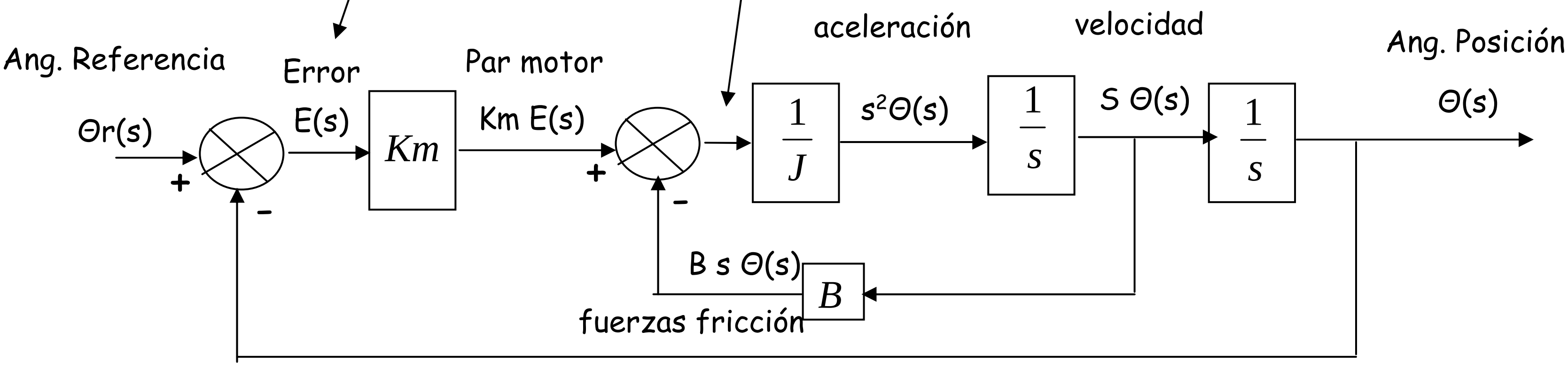
$$\Downarrow$$

$$(\vartheta_r(s) - \theta(s))Km = Js^2\,\theta(s) + B\,s\,\theta(s)$$

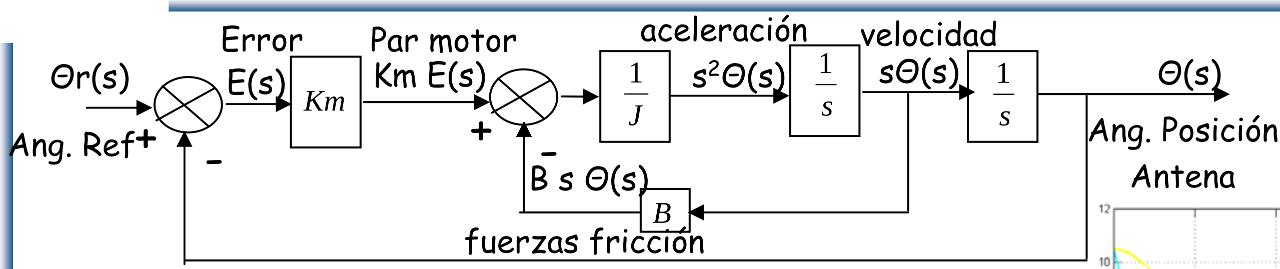
$$\Downarrow$$

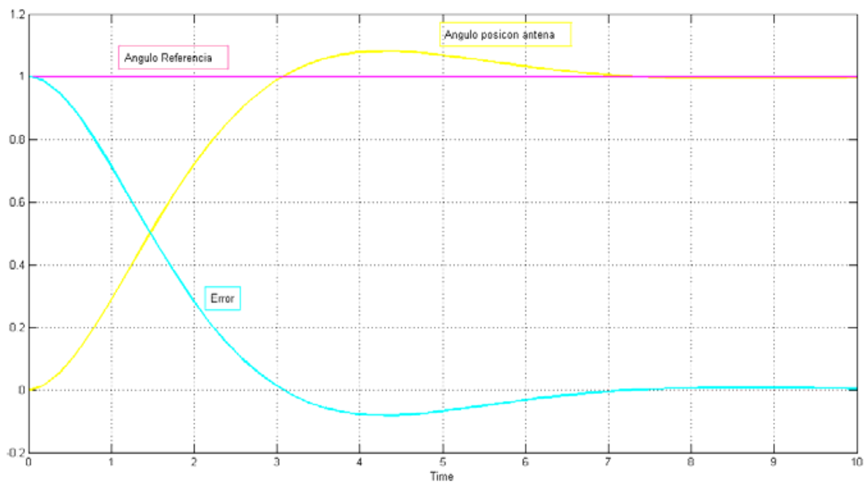
$$E(s)Km - B\,s\,\theta(s) = Js^2\,\theta(s)$$

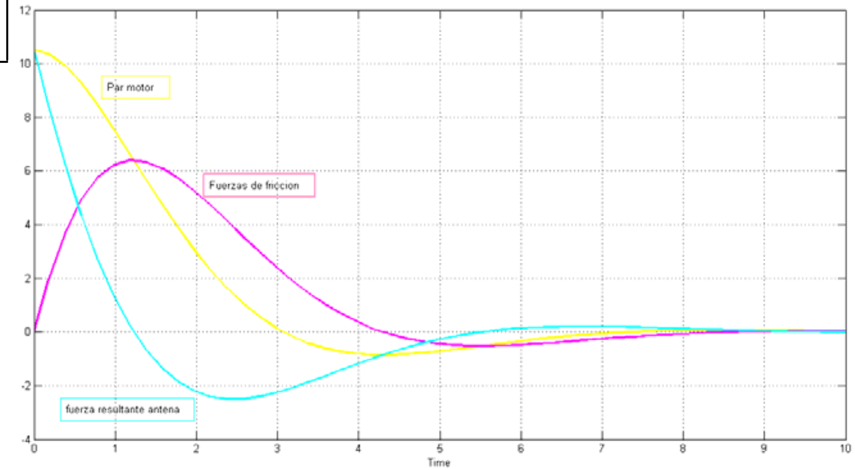
J= 12 m^2 kg
B= 14 m^2 kg/s
Km= 10.5 m2 kg/s^2

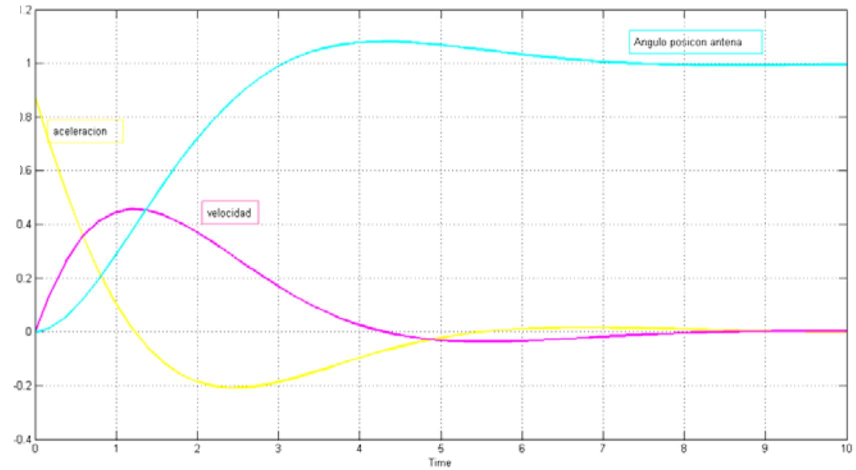


Análisis de respuesta permanente







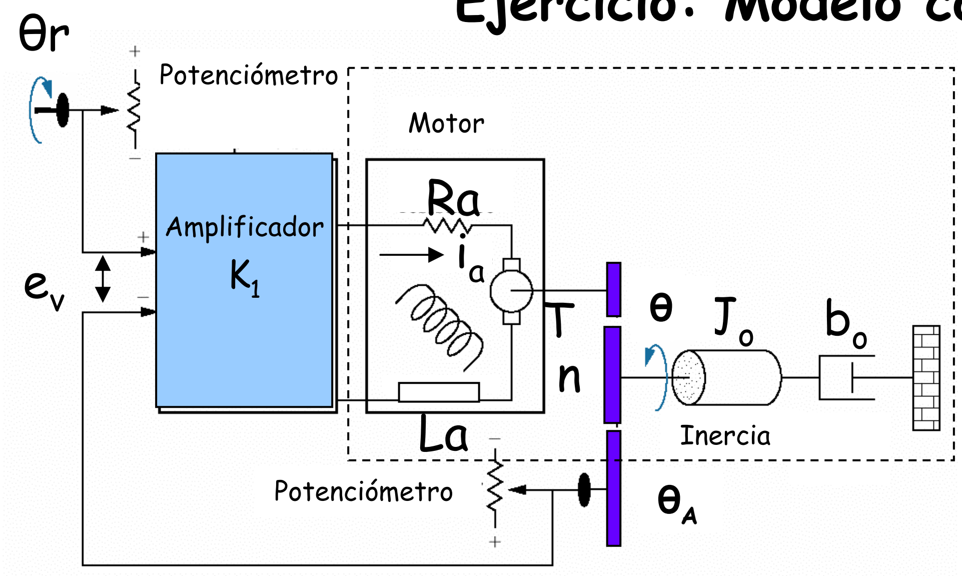


$J = 12\ m^2\ kg$

$B = 14\ m^2\ kg/s$

$Km = 10.5\ m2\ kg/s^2$

Ejercicio: Modelo completo Motor+Antena



Se pide:

1)Obtener las siguientes función de transferencia:

$$G_{V\theta}(s)=\frac{E_v(s)}{\theta(s)},G_{LC}(s)=\frac{\theta_A(t)}{\theta_r(t)}$$

2)Dibujar el diagrama de bloques del sistema, indicando las diferentes variables del sistema: Tensiones, corrientes, fuerzas,

3)Analizar la respuesta del sistema para el caso de una entrada escalón, rampa y parabólica (datos)

Medida de posición y engranaje:

$e_v = K_o[\theta_r(t)-\theta_A(t)] \longrightarrow$ Pot. medida

$\theta_A(t)=n\,\theta(t) \longrightarrow$ Posición ang. Antena

Ecuaciones eléctricas motor:

$$L_a\frac{d\,i_a(t)}{dt}+R_a i_a(t)+e_b=e_a$$

$e_b=K_3\dfrac{d\,\theta(t)}{dt} \longrightarrow$ Fuerza c.e.m

$e_a=K_1 e_v \longrightarrow$ Tensión inducido motor

Ecuaciones dinámicas motor+antena:

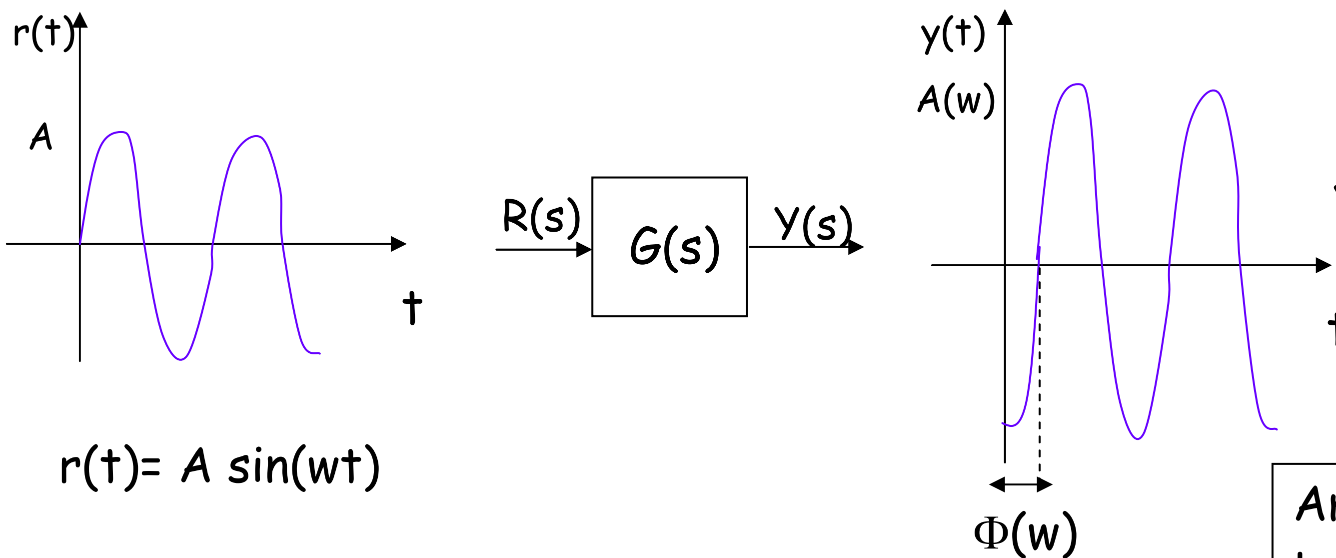
$$J_o\frac{d^2\,\theta(t)}{dt^2}+b_o\frac{d\,\theta(t)}{dt}=T$$

$T=K_2\,i_a(t) \longrightarrow$ Par motor

Para el estudio de los sistemas en el dominio de la frecuencia se considera lo siguiente:

1) señal de entrada sinusoidal: $r(t)= A \sin (wt)$
2) variación de la frecuencia $w=(0,+\infty)$
3) Régimen permanente

Teniendo en cuenta esto, tenemos lo siguiente:



$r(t)= A \sin(wt)$

$$y(t)= \boxed{A(w)} \sin(wt+ \boxed{\Phi(w)})$$

Desfase dependiente de la frecuencia de entrada

Amplitud dependiente de la frecuencia de entrada

Ventajas de la representación en frecuencia:

1) Facilidad para obtener la respuesta con un generador de señales
2) La relación entre las señales de salida y de entrada se obtiene simplemente realizando el cambio de ***s*** por ***jw***

Como inconveniente principal es que la relación entre la frecuencia y el tiempo es complicada y de aplicación difícil.

$$r(t) = A\sin(wt) \xrightarrow{R(s)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{Y(s)} y_{rp}(t) = A\,|G(jw)|\,\sin(wt + \Phi(w))$$

Esto es, la función de transferencia en el plano frecuencial se calcula sustituyendo ***s*** por ***jw***.

Ejemplo sistema de 1er orden:

$$G(s) = \frac{k}{T\,s+1} \xrightarrow{s \to jw} G(jw) = \frac{k}{jwT+1}$$

Modulo

$$|G(jw)| = \frac{k}{\sqrt{(T\,w)^2+1}}$$

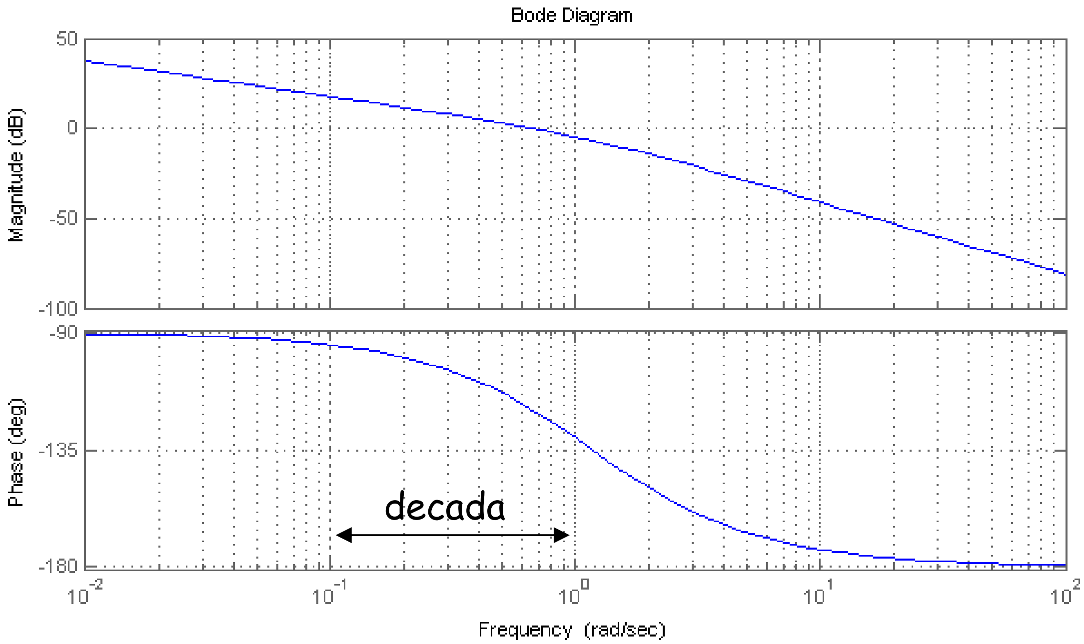
Fase

$$\Phi(w) = -arctg\,(wT)$$

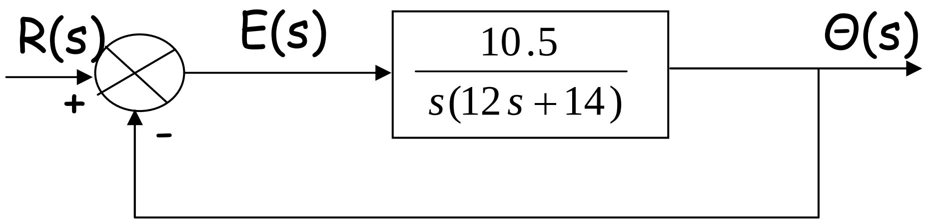
Como se puede apreciar la transformación del plano temporal al frecuencial es sencilla, pero su **representación grafica** puede resultar muy complicada si el sistema es de orden superior. Por ello, en el caso del **modulo** de la función de transferencia se utiliza la escala logarítmica y se define el decibelio:

$$G_{db} = |G(jw)|_{db} = 20 \log |G(jw)| \quad \text{[decibelio]}$$

También se define la **década** como: $f_2/f_1=10$. Así, dos frecuencias están a **n** décadas cuando su relacione su relación es: $f_2/f_1=10^n$



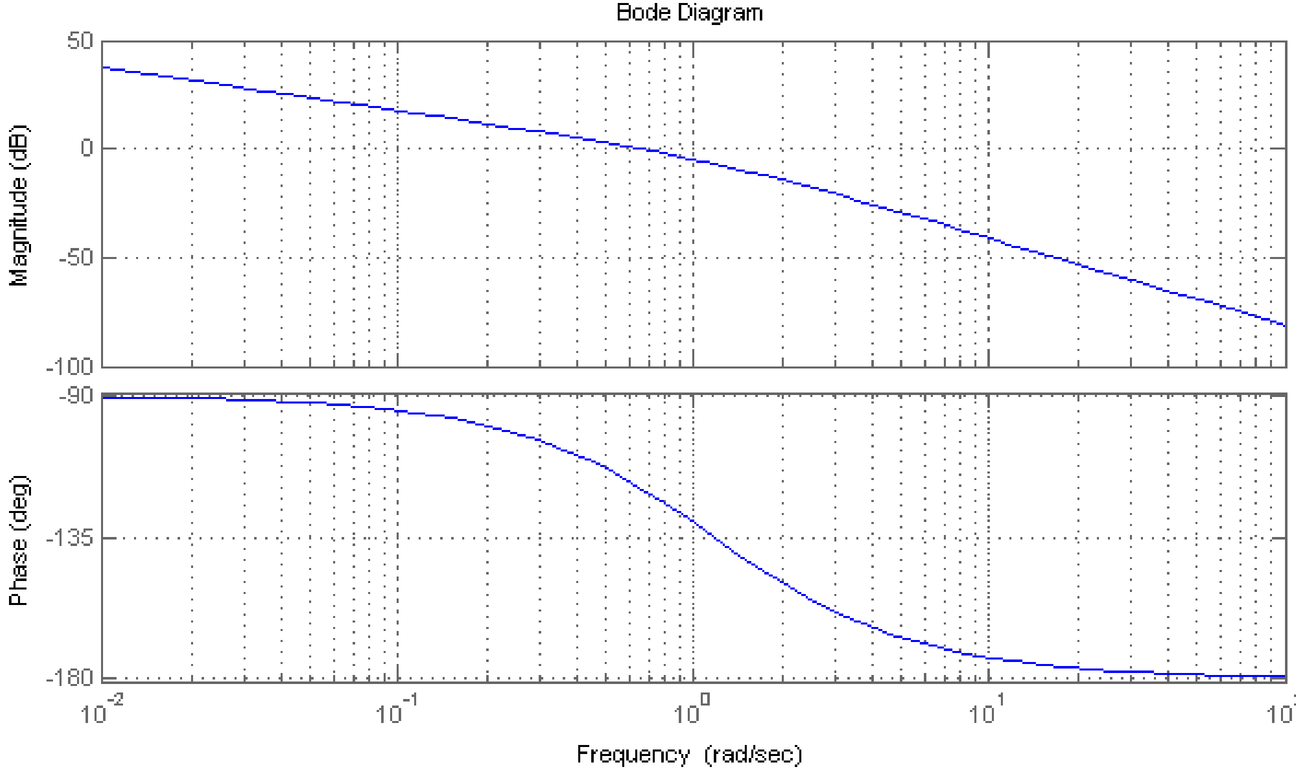
SISTEMA DE ORIENTACION



Sistema en lazo abierto

$$G_{LA}(s)=\frac{10.5}{s(12s+14)} \xrightarrow{s\to jw} G(jw)=\frac{10.5}{jw(12jw+14)}$$

Modulo en decibelios: $G_{db}(jw)=20\log 10.5-20\log w-20\log|14+12wj|$



Programa en MATLAB:

```
G=tf(10.5,[12,14,0])
bode(G)
```

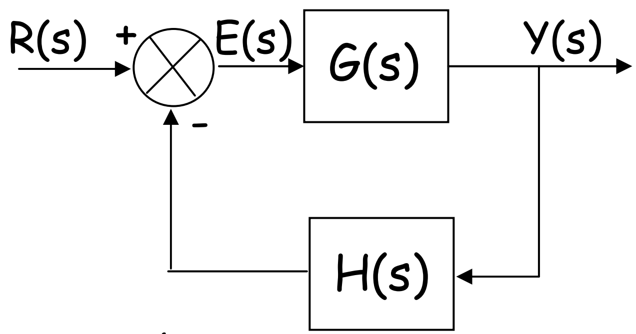
Fase en grados:

$$\Phi(w)=-90-arctg\left(\frac{12w}{14}\right)$$

Estabilidad en el dominio del tiempo

La estabilidad de los sistemas realimentados esta relacionada únicamente con la propia naturaleza del sistema, no con el tipo de entrada que se le aplica. Por lo tanto, la **estabilidad** se definirá en la **función de transferencia** que representa al sistema, concretamente en los polos de la F.T.

*Un sistema será estable cuando todos sus polos estén en el semiplano negativo del plano **s**. Esto es, cuando la parte real de los mismos sea negativa.*



Siendo:

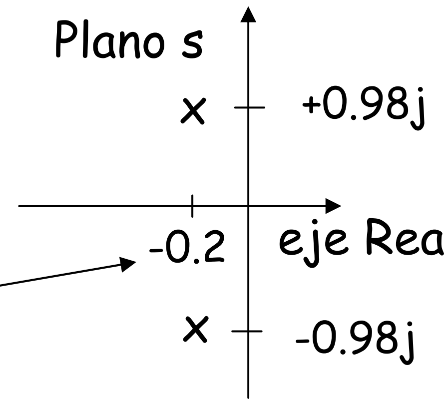
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

$$H(s) = 1$$

SISTEMA EN LAZO ABIERTO:

$$G_{LA}(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

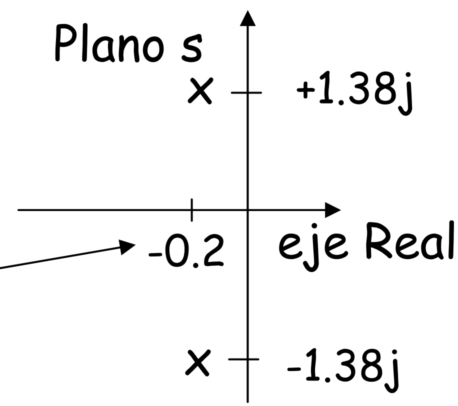
ESTABLE



SISTEMA EN LAZO CERRADO:

$$G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 2}$$

ESTABLE



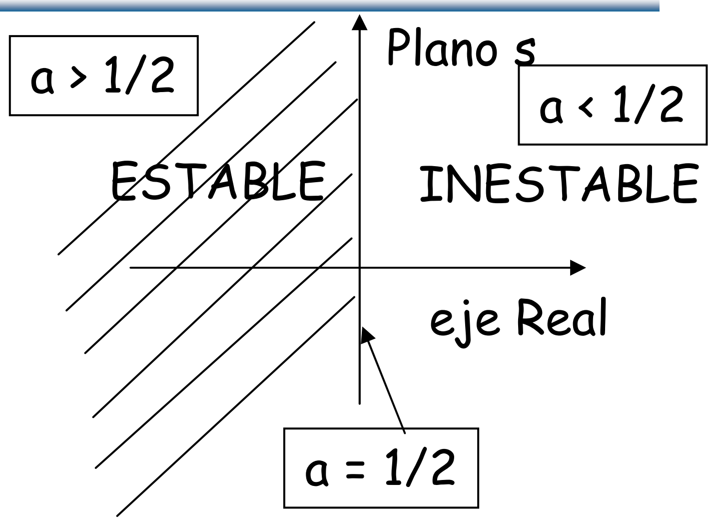
Estabilidad en el dominio del tiempo

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{2s + b}{3s^3 + 6s^2 + a\,s + 1}$$

¿Para que valores de a y b el sistema es estable?

*Para cualquier valor real de **b** el sistema es **estable** debido a que los ceros no afectan a la estabilidad*



Para analizar la influencia de **a** tenemos que aplicar el criterio de Routh-Hurwitz:

a)**a>0**, debido que todos los coeficientes el del denominador deben de ser estrictamente positivos.

b) Realizar la tabla:

Los coeficientes de la primera columna deben ser **positivos** para que el sistema sea estable.

s^3	3	a
s^2	6	1
s^1	(6a-3)/6	1
s^0	1	

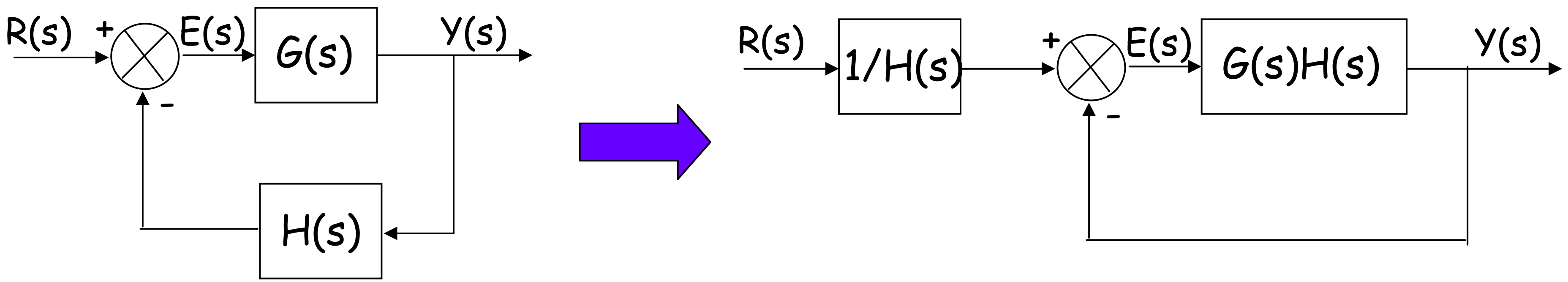
(6a-3)/6 > 0 ⇒ a > 1/2

Conclusión:

Para cualquier b y para **a>1/2** el sistema es estable.

Como ya se vio anteriormente, la estabilidad de los sistemas depende de la posición de los polos de la función de transferencia en el plano **s**. Si los polos se encuentran el el semiplano negativo, el sistema será estable. Esto ultimo se refiere a la estabilidad **absoluta**.

Cuando se diseña un sistema de control se requiere que el sistema sea estable en términos absolutos, pero además es necesario que tenga una estabilidad **relativa**.



En el caso de los sistemas de fase mínima, en los cuales la F.T en lazo abierto no tiene ni polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s, se definen dos parámetros que nos indican en que grado el sistema es estable en lazo cerrado. Estos parámetros son el **margen de fase** y el **margen de ganancia**.

ESTABILIDAD RELATIVA

Margen de fase (MF):

Se define como la cantidad de retraso de fase que se requiere añadir al sistema para llevarlo a la inestabilidad.

$$MF = 180 + \Phi(w_{gc})$$

Margen Ganancia (MG):

Se define como la cantidad de ganancia que se que se requiere añadir al sistema para llevarlo a la inestabilidad.

$$MG = -20\log\left|GH(w_{fc})\right|$$

Frecuencia de ganancia critica

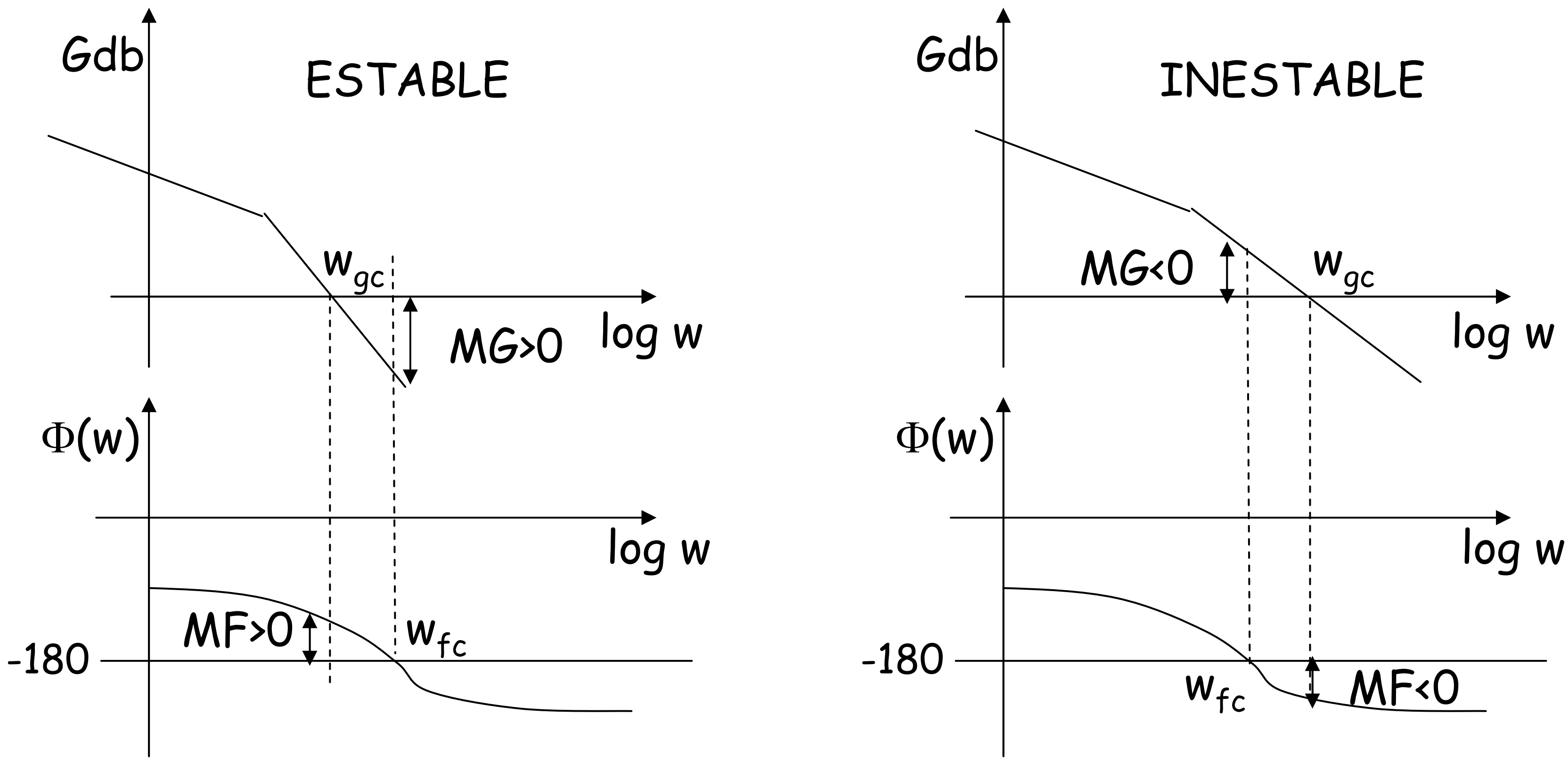
$$w_{gc} \rightarrow \left|GH(jw_{gc})\right| = 1 \rightarrow G_{db}H_{db}(jw_{gc}) = 0db$$

Frecuencia de fase critica

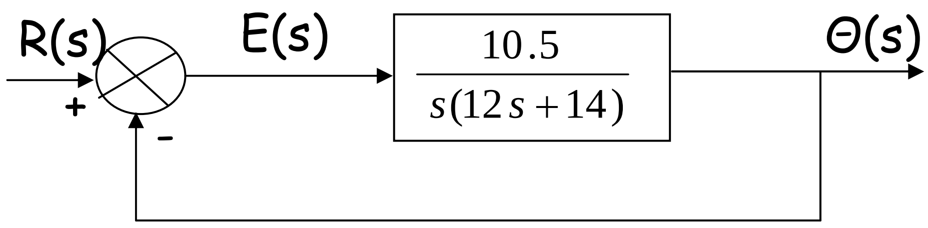
$$w_{fc} \rightarrow \Phi(w_{fc}) = -180^{o}$$

ANALISIS DE ESTABILIDAD RELATIVA

Un sistema de fase mínima será **estable** si el **margen de ganancia** y el **margen de fase son positivos**. En La figura se representan los diagramas de bode de un sistema estable y otro inestable.



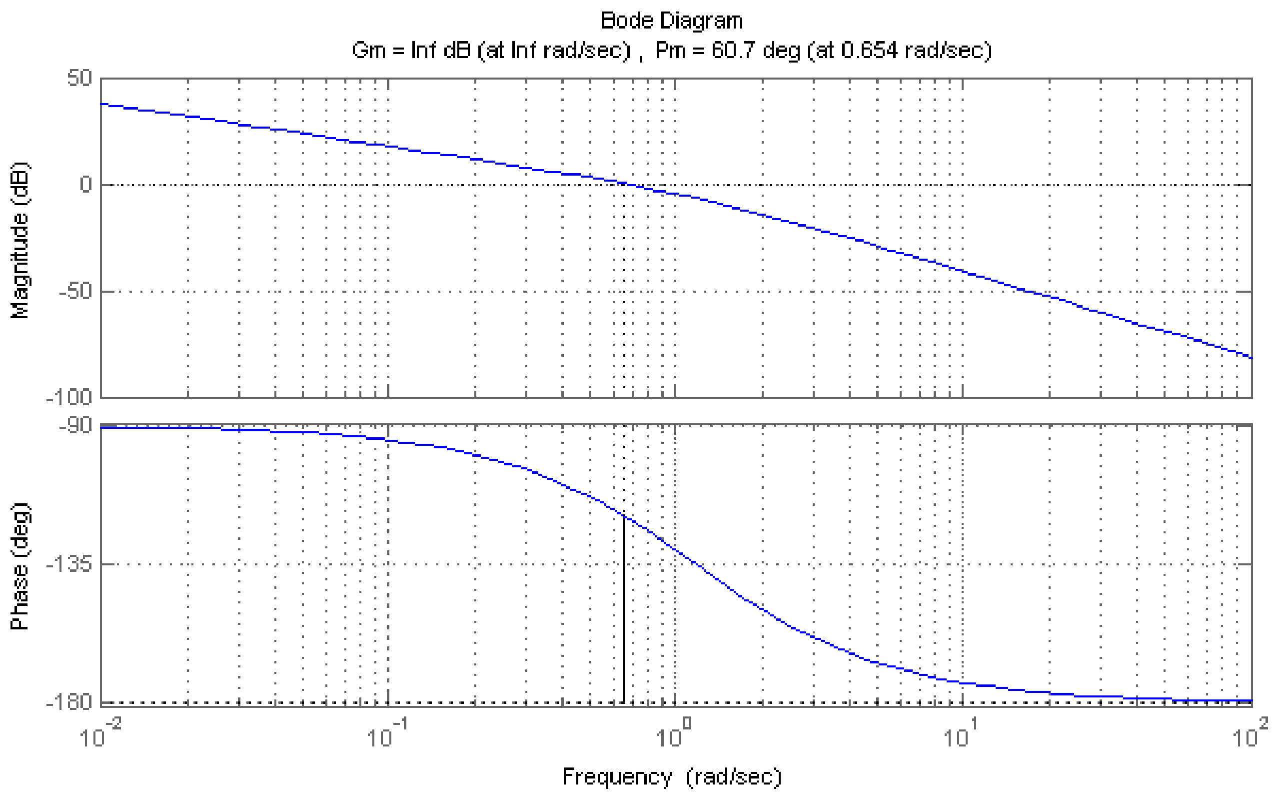
SISTEMA DE ORIENTACION



$$\frac{10.5}{s(12s+14)}$$

ESTABILIDAD RELATIVA

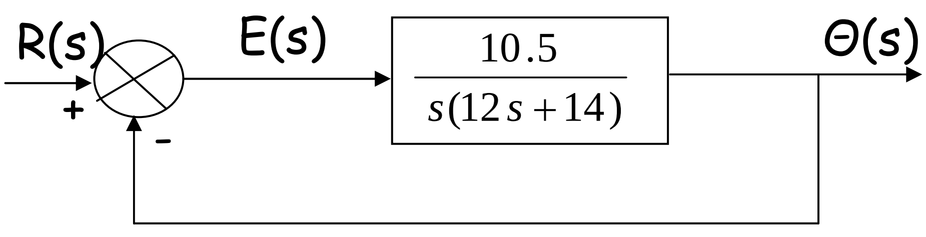
$$\left.\begin{array}{l} MG=\infty \text{ db} \\ MF=60.7^\circ \end{array}\right\} \text{Estable}$$



Programa en MATLAB:

```
G=tf(10.5,[12,14,0])
bode(G)
margin(G)
```

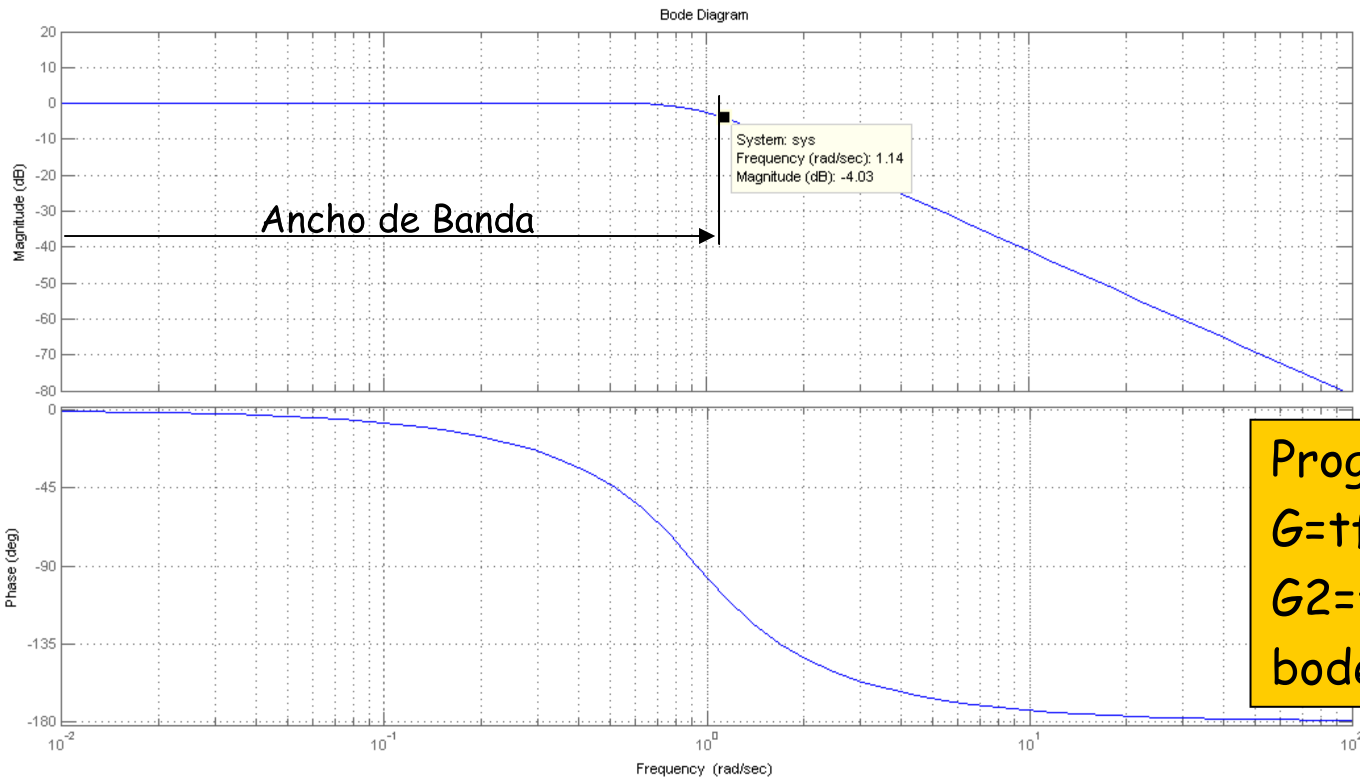
SISTEMA DE ORIENTACION



Sistema en lazo cerrado

$$G_{LC}(s)=\frac{10.5}{12s^2+14s+10.5}\xrightarrow{s\to jw}G(jw)=\frac{10.5}{12(jw)^2+14jw+10.5}$$

Ancho de Banda: w Є [0, 1.14 rad/s]



Programa en MATLAB:

```
G=tf(10.5,[12,14,0])
G2=feedback(G,1)
bode(G2)
```