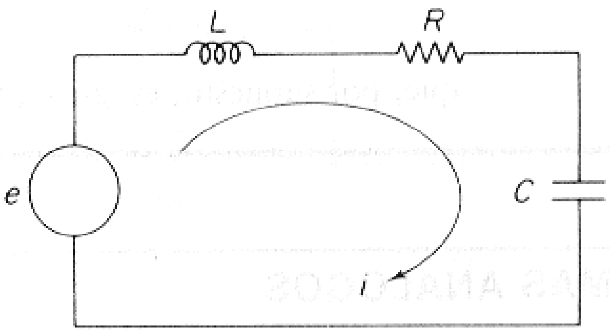
¿Para qué se utiliza la transformada de Laplace?

*Para resolver **ecuaciones diferenciales** lineales con coeficientes constantes.*

Pero, ¿para qué necesitamos resolver ecuaciones diferenciales?

*Los **sistemas físicos (de orientacion,** eléctricos, mecánicos, electrónicos, térmicos..) pueden expresarse de una manera aproximada mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo. Esto es, podemos expresar los sistemas mediante su **modelo matemático** y deducir de manera teórica su comportamiento ante diferentes tipos de estímulos (entradas escalón, rampa, parabólica ...).*

Ejemplo: **circuito RLC**



Aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$\sum V = 0$$

$$\underbrace{\boxed{L\frac{d\,i(t)}{dt}}}_{V_L} + \underbrace{\boxed{R\,i(t)}}_{V_R} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{C}\int i(t)\,dt}}_{V_C} = e(t)$$

Ec. diferencial lineal con coef. ctes

Transformada de Laplace

$$L(f(t))$$

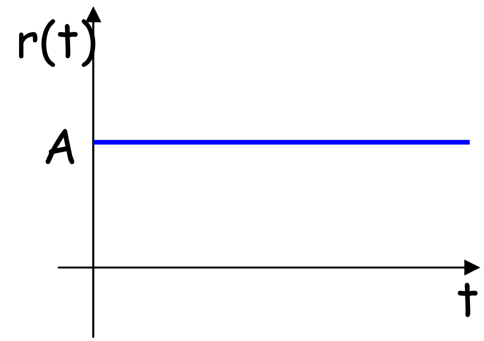
$$\boxed{L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t} dt} \Rightarrow$$

Transformada Inversa de Laplace

$$L^{-1}(F(s))$$

$$\boxed{L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi\, i} \int F(s)\, e^{s\,t} ds}$$

Ejemplo: **función Escalón** r(t)=A



La transformada de Laplace de la función escalón:

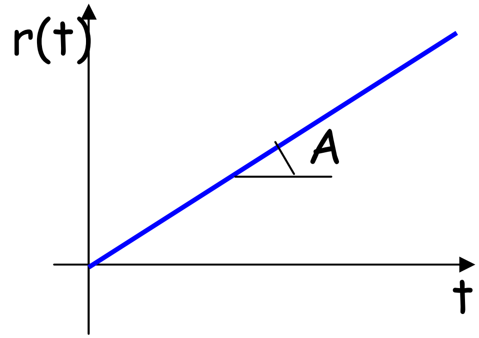
$$L(r(t)) = \int_0^\infty A\, e^{-s\,t} dt = \boxed{\frac{A}{s}}$$

Si A= 1 se denomina **escalón unitario**

Ejemplo: **función Rampa** r(t)=A t

La transformada de Laplace de la función rampa:

$$L(r(t)) = \int_0^{\infty} At\, e^{-s\,t} dt = \boxed{\frac{A}{s^2}}$$



Siendo A la pendiente de la recta

Si A= 1 se denomina función **Rampa unitaria**

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Linealidad ⇨ $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Rightarrow F(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

Diferenciación

$$F\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s\,F(s) - f(0)$$

$$F\left(\frac{d^2(f(t))}{dt^2}\right) = s^2\,F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

Integración ⇨ $F\left(\int f(t)dt\right) = \dfrac{F(s)}{s}$

TEOREMA DEL VALOR FINAL

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

Para calcular la transformada inversa, se utilizan las tablas que relacionan la función f(t) con su transformada y viceversa.

En la tabla de la derecha se representan las transformadas de Laplace de las funciones mas importantes.

Laplace transform pairs

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
16	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Un sistema físico puede expresarse de manera externa mediante:

1) Ecuaciones diferenciales
2) La función Impulso
3) La función de Transferencia

Las tres formas de representación están relacionadas y vamos a centrarnos principalmente en la representación mediante la **función de transferencia.**

Cualquier sistema físico estará completamente definido si para cada entrada (r(t)) conocemos su salida (y(t)). Este tipo de representación se conoce como **representación externa** de los sistemas y considera únicamente la relación entre la salida y la entrada.

FUNCION DE TRANSFERENCIA

Se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada.

Relación entre las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia

Supongamos un sistema que puede expresarse mediante la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\, y(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{d\, r(t)}{dt} + b_m r(t)$$

Suponiendo las condiciones iniciales nulas y aplicando la propiedades de la transformada de Laplace (linealidad y diferenciación), la ecuación superior se convierte en una ecuación algebraica:

$$a_0\, s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_{n-1} s\, Y(s) + a_n Y(s) = b_0\, s^m R(s) + b_1 s^{m-1} R(s) + \ldots + b_{m-1} s\, R(s) + b_m R(s)$$

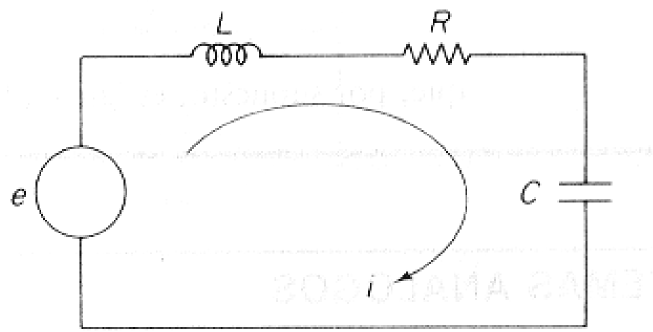
Sacando factor común Y(s) y R(s) en ambos lados de la ecuación obtenemos la **función de transferencia del sistema G(s)**.

FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0\, s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0\, s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}}$$

SISTEMAS ELECTRICOS

Ejemplo: **circuito RLC**



$$L\frac{d\,i(t)}{dt}+R\,i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=e(t)$$

Transformada de Laplace

$$L\,s\,I(s)+R\,I(s)+\frac{I(s)}{C\,s}=E(s)$$

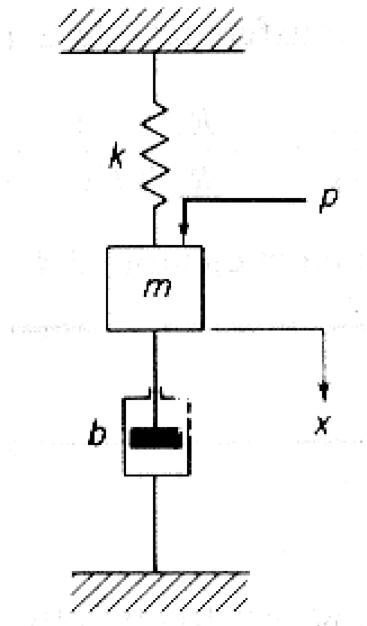
Calculamos la función de transferencia que relaciona de la corriente I(s) frente a la tensión de entrada E(s):

$$G(s)=\frac{I(s)}{E(s)}=\frac{C\,s}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}$$

$$E(s)\longrightarrow\boxed{\frac{C\,s}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}}\longrightarrow I(s)$$

$$E(s)\longrightarrow\boxed{G(s)}\longrightarrow I(s)$$

SISTEMAS MECANICOS



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{d\,x(t)}{dt}+k\,x(t)=p(t)$$

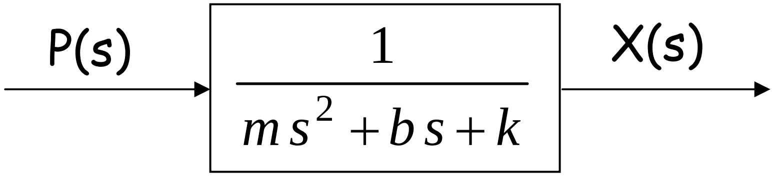
Transformada de Laplace

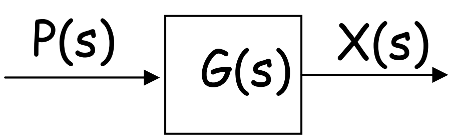
$$m\,s^2\,X(s)+b\,s\,X(s)+kX(s)=P(s)$$

**condiciones iniciales nulas*

Calculamos la función de transferencia que relaciona de la corriente I(s) frente a la tensión de entrada E(s):

$$\boxed{G(s)=\frac{X(s)}{P(s)}=\frac{1}{m\,s^2+b\,s+k}}$$



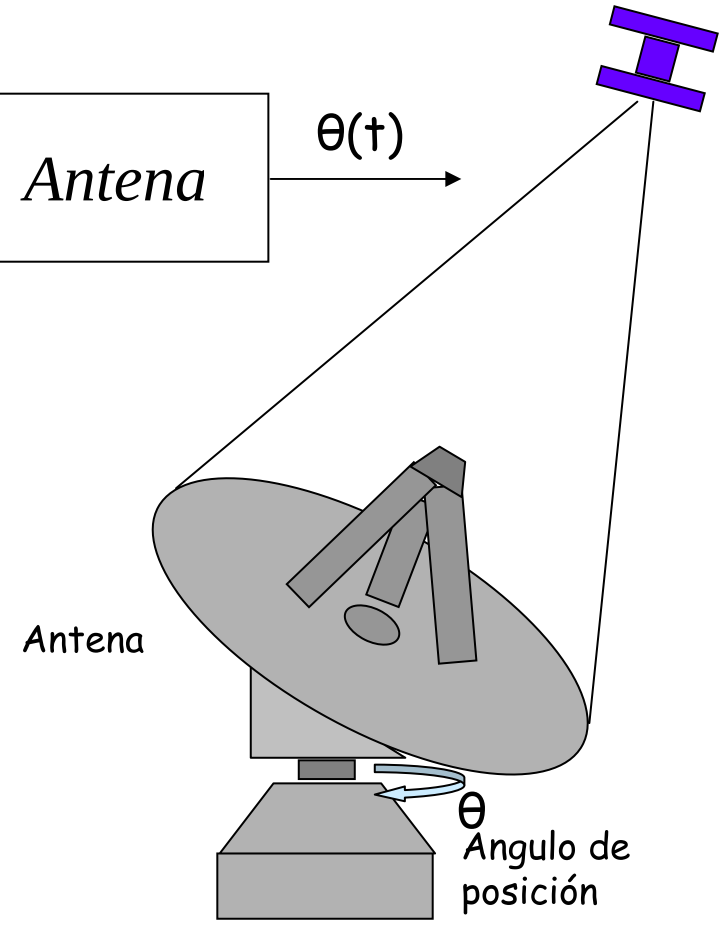


SISTEMAS DE ORIENTACION: modelo reducido

$$\boxed{J\ddot{\vartheta}(t)} + \boxed{B\,\dot{\vartheta}(t)} = \boxed{e(t)Km}$$

Fuerzas de inercia — Fuerzas fricción — Par motor

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\textit{Antena}} \longrightarrow \theta(t)$$



$\vartheta(t)$= angulo de giro antena

e(t)=error seguimiento

J= momento inercia (antena+motor)

B= coef. de fricción (antena+motor)

Km= cte motor

SISTEMAS DE ORIENTACION: modelo reducido

$$J\ddot{\vartheta}(t) + B\,\dot{\vartheta}(t) = e(t)Km$$

Transformada de Laplace

$$Js^2\,\theta(s) + B\,s\,\theta(s) = E(s)Km$$

Calculamos la función de transferencia en lazo abierto que relaciona el ángulo de posición θ(s) frente al error de seguimiento E(s):

$$\boxed{G(s) = \frac{\vartheta(s)}{E(s)} = \frac{Km}{s(Js+B)}}$$