Tema 6

Modelos Dinámicos

6.1. Introducción

Este tema vuelve a ocuparse de la modelización de relaciones entre variables dentro de un contexto de datos en el tiempo o series temporales. Como ya comentamos en el tema de autocorrelación, estos datos presentan un ordenamiento natural, ya que las observaciones están ordenadas de acuerdo al momento del tiempo en que han sido observadas.

A su vez, será probable que a la hora de explicar el comportamiento de una variable observada en el tiempo, se tenga en cuenta que bien su propio pasado pueda ser relevante en periodos sucesivos, o bien que el efecto de una variable explicativa no sea sólo contemporáneo sino que puede tener efectos distribuidos en años sucesivos. Finalmente, además se pueden tener factores no observables recogidos en el término de perturbación del modelo cuya influencia se mantiene a lo largo del tiempo. De esa última parte ya nos ocupamos en el tema de autocorrelación. En este nuevo tema trataremos de estudiar la manera de recoger, en un modelo de regresión lineal, estos efectos temporales o dinámicos en la parte que llamamos sistemática, o de factores observables, y su posible interacción con el tema de autocorrelación, que ya de por sí introduce dinámica en el error, donde se recogen efectos o variables no observables. Primeramente nos ocuparemos de ver distintas especificaciones y en cada caso se comentarán los problemas que pueden surgir en la estimación por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios. Si hay métodos alternativos a MCO también se discutirá su utilización y propiedades.

Por último, nos ocuparemos de un ejemplo empírico que nos llevará por diferentes especificaciones: desde un modelo estático donde se especifica una relación contemporánea entre la tasa de fertilidad anual en EE.UU. en el siglo XX y las exenciones fiscales en ese año, hacia diferentes especificaciones más generales donde se introduce explícitamente la modelización dinámica en todas sus fuentes. Este ejemplo también será la base para las prácticas de ordenador. De esta forma, lo estudiado en las clases magistrales se reforzarán a la hora de obtener los resultados en el centro de cálculo.

6.2. Especificación y estimación de modelos dinámicos

En el contexto del modelo de regresión lineal general, las relaciones dinámicas entre la variable dependiente y las variables explicativas se pueden introducir de diversas maneras:

6.2.1. Dinámica solamente en la parte sistemática

Entendemos por parte sistemática del modelo a aquella que contiene las variables explicativas observables o regresores del modelo. Se pueden considerar dos tipos de regresores: retardos de la variable dependiente o endógena que son regresores estocásticos, y por otro lado retardos de las variables consideradas fijas o exógenas, esto es, que en ningún caso están correlacionadas con el término de error del modelo e incluso se pueden considerar independientes de éste. En el modelo podemos tener solamente un tipo de cada uno o también una mezcla, pero sus características diferentes hacen que tengamos que ser cautelosos a la hora de estudiar el tipo de problemas que pueden introducir a la hora de la estimación e inferencia.

Modelos con variables no estocásticas o exógenas retardadas

La formulación general del modelo, para el caso de una sola variable exógena X_t o regresor fijo, es:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + \ldots + \beta_{m+1} X_{t-m} + u_t \tag{6.1}$$

Este tipo de modelos recibe el nombre de modelo de retardos distribuidos finitos.

Si $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ y los regresores son variables no estocásticas, el estimador MCO es lineal, insesgado y eficiente. El problema que puede surgir es la poca precisión en la estimación de los efectos individuales de la variable X_t y sus retardos, ya que el grado de multicolinealidad entre estos regresores puede ser muy alto. Esto es debido a que las series temporales económicas suelen presentar cambios lentos de un período a otro. Por otro lado, cuantos más retardos introduzcamos más coeficientes tendremos que estimar a la vez que dispondremos de menos observaciones, por lo que existe una disminución por ambos lados de los grados de libertad.

Aquí surge otro problema ya que el número de retardos a introducir tal que el error sea ruido blanco puede ser elevado. Por lo tanto, la inferencia para poder determinar qué retardos son relevantes o cuantos introducir en el modelo desde el inicio de la especificación puede verse afectada por este problema de multicolinealidad, agravado por tener pocos grados de libertad. Este es un problema de difícil solución, a no ser que se imponga cierta estructura *ad-hoc* o restricciones en los coeficientes reduciendo el número de parámetros a estimar.

Modelos con variable endógena retardada

Si el modelo incluye entre sus variables explicativas retardos de la variable endógena, se deja de cumplir el supuesto de regresores no estocásticos. La matriz de datos X es estocástica, ya que los regresores que son retardos de la variable dependiente $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots, Y_{t-s}$, son variables aleatorias que vienen determinados por los términos de perturbación $u_{t-1}, u_{t-2}, \cdots, u_{t-s}, \ldots$. Nos encontramos, por lo tanto, en el caso de regresores estocásticos y es preciso hacer supuestos sobre la distribución conjunta de X y u.

Ejemplo 6.11 En el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \tag{6.2}$$

El supuesto de que la matriz X sea independiente del vector u significa que tanto X_t como Y_{t-1} han de ser independientes de todos los valores pasados, presentes y futuros de la perturbación. El modelo (6.2) implica que el regresor Y_{t-1} está relacionado con $u_{t-1},\ u_{t-2}, \ldots$, por lo que este supuesto no se cumple. Luego implica que el estimador MCO es un estimador sesgado y no se conoce su distribución exacta para un tamaño de muestra dado.

Sin embargo, si el término de perturbación es un ruido blanco $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$, entonces Y_{t-1} no está correlacionado con u_t. Es decir, se cumple que $E(Y_{t-1}\, u_t) = 0$, lo que significa que nos encontramos en el caso de un modelo con regresores estocásticos que no están correlacionados contemporáneamente con la perturbación, por lo que, como vimos en el tema de Regresores Estocásticos, los estimadores MCO son consistentes y tienen distribución asintótica Normal.

Por lo tanto, los modelos dinámicos con variable endógena retardada y perturbaciones bien comportadas se pueden estimar por MCO, conservando estos estimadores sus buenas propiedades asintóticas y siendo válidos asintóticamente los resultados habituales de inferencia estadística.

6.2.2. Dinámica en la parte sistemática y en la perturbación

Consideremos los modelos anteriores pero añadamos que tenemos evidencia de autocorrelación en el término de perturbación. En general para contrastar la existencia de autocorrelación en el término de perturbación en modelos con retardos de variables explicativas, se pueden utilizar tanto el contraste de Durbin-Watson como el de Breusch-Godfrey. Ahora bien, el test de Durbin-Watson no es aplicable cuando en el modelo la variable endógena retardada aparece como regresor. En ese caso el estadístico está sesgado hacia valores que indican ausencia de autocorrelación. Además las cotas de valores críticos tampoco son válidas. Luego, en este caso utilizaremos el contraste de Breusch-Godfrey que sigue siendo válido.

El hecho de tener autocorrelación en el error introduce diferentes implicaciones en las propiedades del estimador MCO al tener solamente retardos de variables exógenas o regresores no estocásticos o tener también retardos de la variable endógena. Por eso los trataremos por separado.

Ejemplo 6.12 **Modelos con variables fijas o exógenas retardadas y autocorrelación**

Por ejemplo, consideremos el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\varepsilon) \tag{6.3}$$

En este caso se combinan los problemas comentados anteriormente debido a la posible multicolinealidad entre los regresores y el problema de autocorrelación, teniendo ambos como consecuencia falta de precisión en la estimación por MCO. Además, como ya hemos comentado en temas anteriores, al existir autocorrelación los estadísticos t y F calculados con el estimador habitual de la matriz de varianzas y covarianzas $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ no son fiables.

La estimación por MCG, o por MCGF si ρ no es conocido, será más eficiente que MCO, al menos asintóticamente, y la inferencia sobre los coeficientes basados en estos métodos será válida. Pero el problema de la multicolinealidad y sus efectos sobre la precisión en las estimaciones de los coeficientes individuales por estos métodos persiste.

Ejemplo 6.13 Modelos con variable endógena retardada y autocorrelación

Supongamos por ejemplo el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \tag{6.4}$$

donde X_t es un regresor no estocástico y u_t no es un ruido blanco, sino que presenta autocorrelación, bien un proceso AR(p) o MA(q).

La existencia de autocorrelación en las perturbaciones hace que Y_{t-1} esté relacionada con u_t mediante la función de regresión y u_t está correlacionado con u_{t-1} debido a la autocorrelación de al menos orden uno en las perturbaciones. Por lo que, por ejemplo en el caso del modelo (6.4) si u_t sigue un AR(1):

$$E(Y_{t-1}u_t) = E\left(\beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 Y_{t-2} + u_{t-1}\right)\left(\rho u_{t-1} + \varepsilon_t\right) \neq 0$$

Estamos en el caso de regresores estocásticos correlacionados con el término de perturbación del modelo que tratamos en el tema de Regresores Estocásticos. En esta situación se demostró que los estimadores MCO de los parámetros del modelo no son consistentes, perdiendo así tanto las buenas propiedades para muestra finitas como asintóticas. Para obtener estimadores consistentes de los parámetros del modelo (6.4) podemos aplicar los siguientes métodos:

- **Estimador de variables instrumentales.** En el modelo (6.4) sólo

  hemos de encontrar un instrumento para Y_{t-1} porque la variable X_t no plantea problemas al ser una variable exógena o regresor no estocástico para todo t. Por esa razón, un instrumento podría ser la variable X_{t-1}, que cumple las condiciones de no estar correlacionada con u_t y sí con Y_{t-1} a través del propio modelo. La matriz Z de instrumentos, en este caso, puede ser la siguiente:

$$\underset{((T-1)\times 3)}{Z} = \begin{bmatrix} 1 & X_2 & X_1 \\ 1 & X_3 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & X_{T-1} \end{bmatrix}$$

  siendo

$$\underset{((T-1)\times 3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_2 & Y_1 \\ 1 & X_3 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & Y_{T-1} \end{bmatrix}; \qquad \underset{((T-1)\times 1)}{Y} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}$$

Al no estar X_{t-1} como regresor en el modelo, el rango de la matriz $(Z'X)$ es completo e igual a 3, por lo que al existir su inversa, el estimador de VI está bien definido como:

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

$$\hat{\beta}_{VI} = \begin{bmatrix} T-1 & \sum_{t=2}^{T} X_t & \sum_{t=2}^{T} Y_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} X_t & \sum_{t=2}^{T} X_t^2 & \sum_{t=2}^{T} X_t Y_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} X_{t-1} & \sum_{t=2}^{T} X_{t-1}X_t & \sum_{t=2}^{T} X_{t-1}Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{T} Y_t \\ \sum_{t=2}^{T} X_t Y_t \\ \sum_{t=2}^{T} X_{t-1} Y_t \end{bmatrix}$$

Ahora bien, este estimador, aunque consistente, no es asintóticamente eficiente. Además, al existir autocorrelación en el término de error, la distribución asintótica derivada en el tema de regresores estocásticos utilizando el teorema de Mann-Wald no es la adecuada en este caso. Por lo tanto, hay que ser cuidadosos a la hora de computar adecuadamente las desviaciones típicas para realizar los contrastes utilizando este estimador.

Una opción alternativa, pero que puede requerir de este estimador como una primera etapa, es utilizar la estimación obtenida por el método de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles.

- **Estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles.** Si la perturbación del modelo (6.4) sigue un $AR(1)$, el modelo transformado que cumple las hipótesis básicas conocido el valor de ρ, para $t = 3, \ldots, T$ es:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} \;=\; \beta_1 (1-\rho) + \beta_2 (X_t - \rho X_{t-1}) + \beta_3 (Y_{t-1} - \rho\, Y_{t-2}) + \varepsilon_t \tag{6.5}$$

El término de error de este modelo, ε_t, es un ruido blanco, por lo que aunque los regresores $(Y_{t-1} - \rho\, Y_{t-2})$ son estocásticos y no son independientes de ε_t, están contemporáneamente incorrelacionadas, $E[(Y_{t-1} - \rho\, Y_{t-2}),\, \varepsilon_t] = 0,\ \forall t$.

Así, tanto el método de Hildreth-Lu como el de Cochrane-Orcutt, son procesos iterativos que se basan en, dado un valor de ρ, minimizar respecto a β la función:

$$SCR(\hat{\beta}) = \sum_{t=3}^{T} \Big[(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) - \hat{\beta}_1(1-\hat{\rho}) - \hat{\beta}_2(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) - \hat{\beta}_3 (Y_{t-1} - \hat{\rho}\, Y_{t-2}) \Big]^2 \tag{6.6}$$

La cuestión relevante es cómo fijar el valor de $\hat{\rho}$ para que el estimador de β así obtenido sea consistente y asintóticamente eficiente. En el caso de el método de Hildreth-Lu no hay problema porque la estimación de ρ se hace en función de una red de valores para este parámetro en el intervalo $(-1, 1)$ tal que se elige aquél asociado con el menor valor en la red calculada como $SCR(\hat{\beta})$ en (6.6).

En el caso del método de Cochrane-Orcutt no es adecuado obtener un estimador de ρ basado en los residuos de estimar los coeficientes β del modelo (6.4) por MCO, ya que éste no es consistente. El proceso se puede iniciar, por ejemplo, calculando los residuos partiendo del estimador por Variables Instrumentales, $\hat{\beta}_{VI}$, de los coeficientes del modelo (6.4). Así, calcularíamos el estimador inicial de ρ como:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{VI,t}\hat{u}_{VI,t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{VI,t-1}^2}$$

donde $\hat{u}_{VI,t} = Y_t - \hat{\beta}_{1,VI} + \hat{\beta}_{2,VI} X_t + \hat{\beta}_{3,VI} Y_{t-1} \qquad t = 2, \ldots, T$. Posteriormente procederíamos de igual forma, sustituyendo ese valor en la función (6.6) y obtendríamos el valor de $\hat{\beta}$ que la minimiza, que sería el obtenido de la regresión en el modelo transformado con ese valor de $\hat{\rho}$. El estimador así obtenido en esta segunda etapa es consistente y asintóticamente eficiente. El procedimiento puede iterarse comenzando con este estimador de β para volver a obtener los residuos y así sucesivamente. Asintóticamente, no se mejora en eficiencia si iteramos.

6.3. Ejemplo magistral: hacia una modelización dinámica

En un estudio sobre la política de natalidad del gobierno de EE.UU. en el siglo XX, los autores disponen de datos anuales sobre las siguientes variables[1], para el período 1913-1984:

gfr:	tasa general de fertilidad[2].
pe :	valor real en dólares de la exención en el pago de impuestos personales.
year :	tendencia temporal t=1,...,72 (de 1913 a 1984).
pill :	variable ficticia igual a 1 en el año de introducción de la píldora 1963.
ww2 :	variable ficticia igual a 1 si el año está entre 1941 y 1945 (2ª guerra mundial)

La cuestión principal del estudio es analizar si, en el agregado, la decisión de tener hijos está relacionada con el valor impositivo de tener un hijo. Inicialmente se especifica un modelo en el que para explicar la tasa de fertilidad en un año concreto solamente se considera como variable explicativa las exenciones fiscales en ese año.

$$\text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 \text{pe}_t + u_t \tag{6.7}$$

Por lo tanto, dado que las variables dependiente y explicativa están en el mismo periodo de tiempo, el efecto de una variación en la reducción fiscal sobre el número de nacimientos se supone que, de tener relevancia, es en el mismo año o de forma contemporánea. Si se supone que el término de perturbación no está correlacionado en el tiempo, el modelo de partida no es un modelo dinámico sino estático. Esta especificación de partida puede no ser la más adecuada, bien porque para analizar el efecto de las exenciones fiscales sobre la tasa de fertilidad se ha de controlar por otros factores que pueden afectar bien en el mismo periodo, de forma contemporánea, o bien en periodos consecutivos. Además, la propia tasa de fertilidad puede presentar cierta dependencia o correlación en el tiempo, tal que pueda ser relevante su propio pasado como variable explicativa. A su vez, pudiera ocurrir que hubiera factores no observables recogidos en el término de perturbación que presentaran correlación en el tiempo. De todo ello nos iremos ocupando de forma escalonada, tratando de encontrar una especificación adecuada.

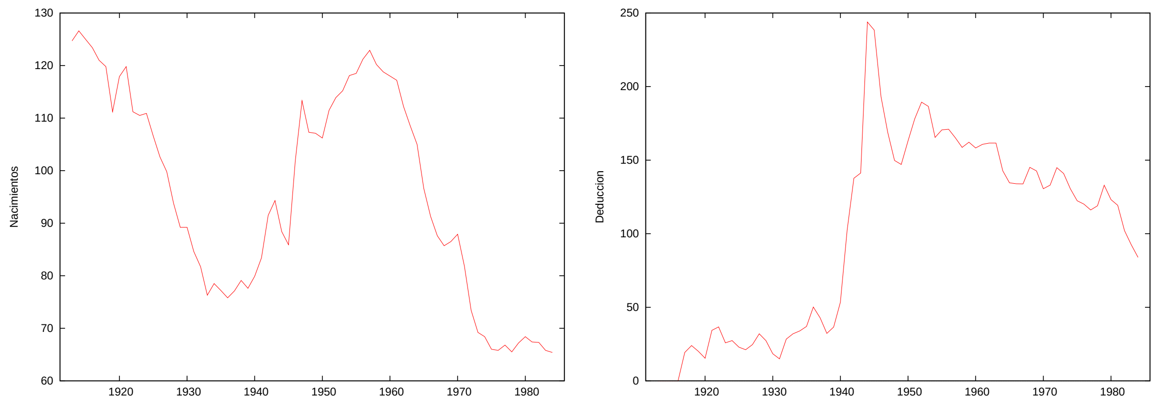
Comencemos pues con esta primera especificación, para la cual consideramos el siguiente análisis:

Del estudio de los gráficos de la evolución temporal de ambas variables podemos concluir que: la serie temporal de la tasa de fertilidad presenta un ciclo con una caída continuada en el periodo de 1913 a 1936 y una recuperación progresiva a partir de esa fecha hasta 1957, año donde se alcanza

[1] Fichero fertil3.gdt, disponible en gretl pestaña Wooldridge. Fuente: Wooldridge, J.M. (2001), *Introducción a la Econometría.*

casi la misma tasa que al comienzo de la muestra. A partir de 1957 vuelve a darse una caída en la tasa de fertilidad, no mostrando señales de recuperación en lo años posteriores hasta el final de la muestra.
Por otro lado, podemos apreciar que las exenciones fiscales experimentaron un crecimiento muy importante entre los años 1940-1945, período de la 2ª guerra mundial, para luego descender, primero de forma abrupta hasta el año 1950 y posteriormente, de forma progresiva, a partir de ese año hasta el final de la muestra.

Figura 6.1: *Gráficos de las series de fertilidad y de las exenciones fiscales*



- Analicemos los primeros resultados obtenidos de la estimación del modelo (6.7)

Estimaciones MCO utilizando las 72 observaciones 1913–1984
Variable dependiente: gfr

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	96,344300	4,30473	22,3810	0,0000
pe	−0,007095	0,03592	−0,1975	0,8440

Media de la var. dependiente	95,63190
D.T. de la variable dependiente	19,80460
Suma de cuadrados de los residuos	27832,4
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	19,94000
R^2	0,00055
$\bar{R}^2$ corregido	−0,01372
Grados de libertad	70
Estadístico de Durbin–Watson	0,04691
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,97791

El valor del coeficiente de determinación $R^2 = 0,000556$ indica que el ajuste es muy pobre. Las exenciones fiscales no explican por si solas casi nada de la tasa de fertilidad en ese mismo año. Esto también se ve reflejado en la no significatividad del coeficiente de regresión, ya que el valor

Figura 6.2: *Gráfico de residuos MCO*

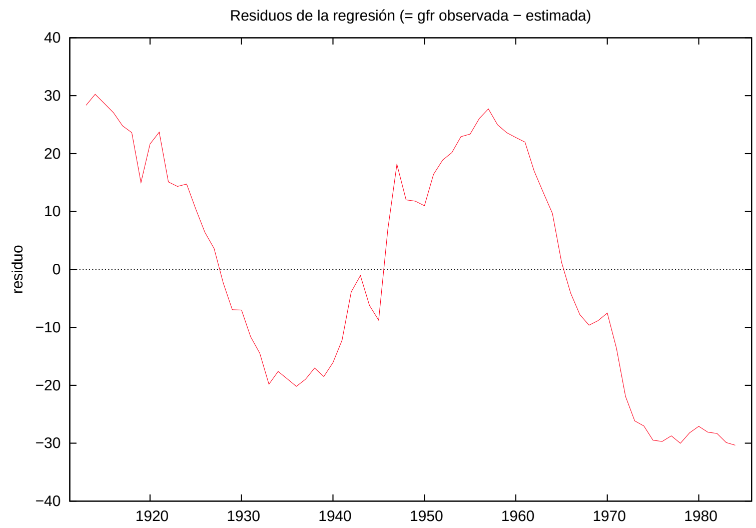
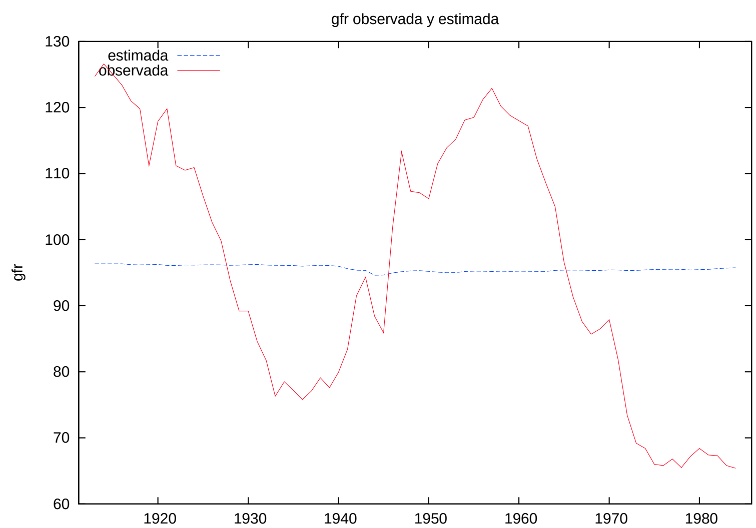


Figura 6.3: *Gráfico de la serie gfr observada y ajustada*



p asociado al valor muestral del estadístico t, 0,844, es mucho mayor que el nivel de significación $\alpha = 0,05$. El contraste de autocorrelación con el estadístico de Durbin-Watson indica que en el modelo (6.7) la perturbación está autocorrelada ya que $DW = 0,046 < 1,58 = d_L$, la cota inferior obtenida para $T = 72$ y $K' = 3$.

Los gráficos de residuos, Figura 6.2, y de la serie observada y ajustada por el modelo, Figura 6.3, indican que el ajuste ha dejado sin explicar toda la evolución temporal de la tasa de fertilidad, y simplemente ha recogido un nivel aproximadamente igual a la media de esta tasa en el periodo muestral. Todos estos elementos llaman a incluir otras variables explicativas en el modelo.

• Consideramos incluir dos variables ficticias, $ww2$ y $pill$, que tienen en cuenta un posible cambio en el valor medio de la tasa de fertilidad durante el periodo de la segunda guerra mundial y a partir de la introducción de la píldora como método anticonceptivo, respectivamente. La especificación sigue siendo la de un modelo estático, ya que no introducimos valores retardados de ninguna variable. El modelo a estimar entonces es el siguiente:

$$\text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2\text{pe}_t + \beta_3\text{pill}_t + \beta_4\text{ww2}_t + u_t \tag{6.8}$$

y los resultados de la estimación se muestran a continuación:

Estimaciones MCO utilizando las 72 observaciones 1913–1984
Variable dependiente: gfr

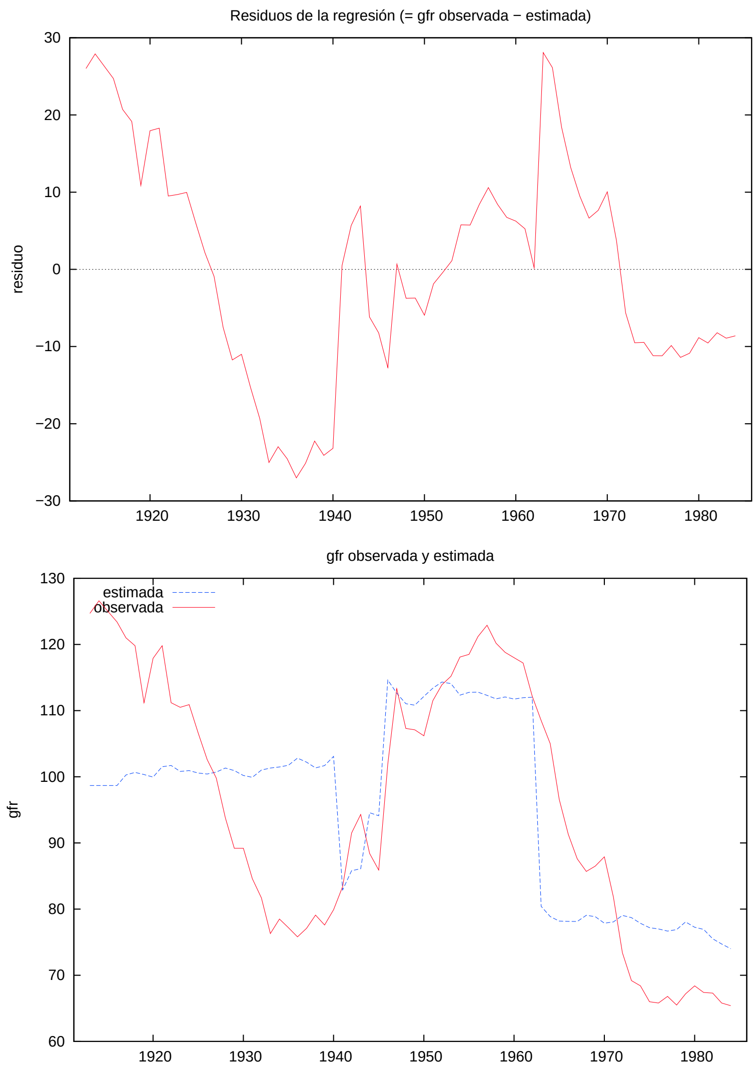
Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	98,6818	3,20813	30,7599	0,0000
pe	0,0825	0,02964	2,7842	0,0069
pill	−31,5940	4,08107	−7,7416	0,0000
ww2	−24,2380	7,45825	−3,2499	0,0018

Media de la var. dependiente	95,6319
D.T. de la variable dependiente	19,8046
Suma de cuadrados de los residuos	14664,3
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	14,6851
R^2	0,4734
$\bar{R}^2$ corregido	0,4501
$F(3,68)$	20,3780
Estadístico de Durbin–Watson	0,1768
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,8904

Las dos variables ficticias presentan coeficientes estimados negativos y son significativas individualmente, indicando que parece existir una caída significativa en media en la tasa de fertilidad, tanto durante el periodo de la 2ª guerra mundial, como después de la introducción de la píldora. A su vez, las exenciones fiscales presentan un coeficiente estimado positivo siendo su efecto sobre la tasa de fertilidad significativo al menos de forma contemporánea, ya que el valor p asociado a su coeficiente igual a $0,0069$ es menor que el nivel de significación tanto del $0,05$ como del $0,01$. En términos de bondad de ajuste se ha mejorado sustancialmente tanto en términos del coeficiente de determinación R^2 como del corregido. El ajuste explica un 47 % de la variabilidad de la tasa de fertilidad en la muestra.

Viendo los gráficos de la serie observada y ajustada junto con el de los residuos, Figura 6.4, se observa que el ajuste no es bueno, especialmente en el periodo inicial de 1913 a 1940. En este periodo la tasa de fertilidad observada disminuye progresivamente mientras que la ajustada se mantiene constante. Por este motivo, el gráfico de los residuos muestra una agrupación de residuos consecutivos del mismo signo que sugiere la posible existencia, también en esta segunda especificación del modelo, de autocorrelación al menos de orden uno positiva. El valor del estadístico de Durbin y

Figura 6.4: *Gráfico de residuos MCO y de la serie gfr observada y ajustada*



Watson igual a $0,176$ es menor que el valor de la cota inferior $d_L = 1,52$ para $T = 72$ y $K' = 3$. Esto confirma la sospecha, ya que se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación frente a un proceso AR(1) con coeficiente positivo en la perturbación del modelo.

La cuestión está ahora en si la dinámica en la tasa de fertilidad es algo a recoger únicamente por el término de error o bien existe un problema de mala especificación tal que se necesita introducir retardos de alguna variable, bien pe, bien gfr o ambas.

Dado que hay autocorrelación en el error, para que la inferencia utilizando el estimador MCO de los coeficientes sea válida, tenemos que estimar de forma consistente la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados por MCO. Estos serían los resultados utilizando un estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados robusto a la existencia de autocorrelación:

Estimaciones MCO utilizando las 72 observaciones 1913–1984
Variable dependiente: gfr
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	98,6818	7,69679	12,8212	0,0000
pe	0,0825	0,04772	1,7294	0,0883
pill	−31,5940	5,43135	−5,8170	0,0000
ww2	−24,2380	3,55876	−6,8109	0,0000

De esta forma podemos hacer los contrastes de significatividad individual con los valores de los estadísticos t que nos muestra el output eligiendo el valor crítico en la distribución N(0,1). El valor crítico de la N(0,1) para un contraste a dos colas al nivel de significación del 5 % es 1,96 luego las variables *pill* y $ww2$ son individualmente significativas. En cambio las ayudas fiscales dejan de serlo al 5 %, aunque aún lo serían al 10 % de significación.

• Si el problema de autocorrelación detectado es debido a la existencia de un proceso AR(1) en la perturbación, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, el modelo debería ser estimado por MCGF, bien Cochrane-Orcutt o Hildreth-Lu. Utilizamos el método de Cochrane-Orcutt y obtenemos los siguientes resultados:

Estimaciones por Cochrane–Orcutt, usando las observaciones 1914–1984 ($T = 71$)
Variable dependiente: gfr
$\hat{\rho} = 0{,}976137$

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	66,8660	21,5987	3,0958	0,0029
pe	−0,0159	0,0318	−0,5028	0,6168
pill	−3,4131	4,2129	−0,8101	0,4207
ww2	−5,4514	3,3389	−1,6327	0,1072

La estimación del coeficiente ρ es muy cercana a la unidad, $\hat{\rho} = 0{,}976137$, lo que indica una alta persistencia en la serie de los residuos, tardan en cambiar el signo. Los estadísticos de significatividad individual muestran que ninguna de las variables explicativas es significativa. Este resultado es bastante llamativo. Además el coeficiente que acompaña a la variable *pe* es de signo contrario al esperado. Parece que esa alta persistencia en la serie de los residuos puede estar afectando a estos resultados.

La evidencia existente de autocorrelación en el modelo anterior llama a considerar otras especificaciones alternativas donde se tenga en cuenta características en el tiempo de la serie a explicar, como pueden ser tendencias, dependencia en el tiempo de la propia serie o efectos distribuidos en el tiempo de la exención fiscal sobre la tasa de fertilidad.

- Especificaciones alternativas:

A. Modelización de tendencias añadiendo al modelo una tendencia temporal lineal, t, o cuadrática, t^2.

En la Figura 6.1 se observa que la serie gfr o tasa de fertilidad presenta una caída continuada en todo el periodo muestral a excepción de los años 1936-1957. Viendo el gráfico de la serie gfr observada y ajustada, Figura 6.4, esta tendencia decreciente parece que no está bien recogida por la especificación (6.8). Esta puede ser una de las causas de detectar autocorrelación positiva en el error. Una forma de recoger esta tendencia es incluir como regresor la variable t, tiempo o tendencia temporal; luego $t = 1, 2, \ldots, 72$. Esta variable puede recoger parte de la influencia de factores no observables que están creciendo o decreciendo sistemáticamente en el tiempo.

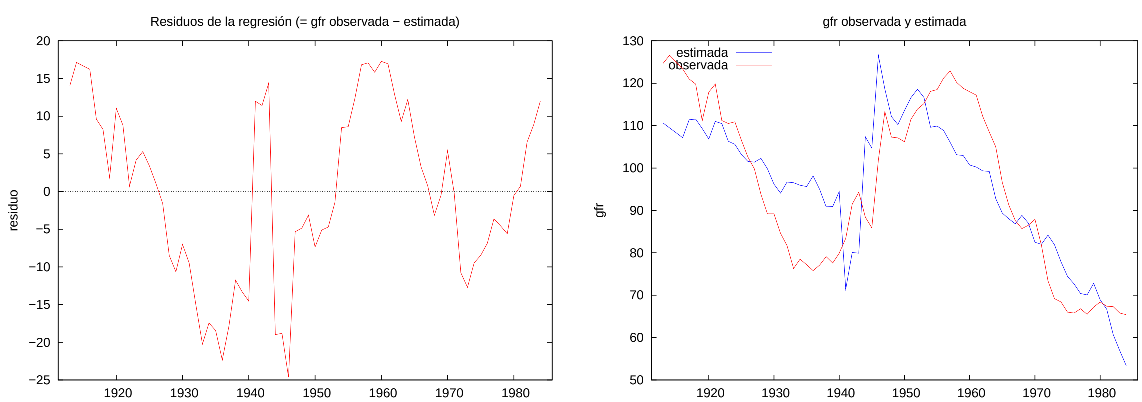
$$\text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \text{pe}_t + \beta_4 \text{pill}_t + \beta_5 \text{ww2}_t + u_t \tag{6.9}$$

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1913–1984 ($T = 72$)
Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	111,7690	3,35777	33,2868	0,0000
t	−1,1498	0,18790	−6,1195	0,0000
pe	0,2788	0,04001	6,9685	0,0000
pill	0,9974	6,26163	0,1593	0,8739
ww2	−35,5923	6,29738	−5,6519	0,0000

R^2	0,662213	R^2 corregido	0,642047
$F(4, 67)$	32,83745	Valor p (de F)	3,76e–15
$\hat{\rho}$	0,819265	Durbin–Watson	0,350212

Figura 6.5: *Gráficos de residuos y de la serie gfr observada y ajustada*



Vemos en los resultados de la estimación por MCO de esta especificación (6.9) que el ajuste ha mejorado, tanto en términos del coeficiente de determinación corregido como gráficamente, en el gráfico de la serie gfr observada y ajustada, Figura (6.5.) La tendencia t es una variable significativa y el coeficiente estimado es negativo, recogiendo que la tasa de fertilidad gfr está descendiendo, en media, a lo largo del período muestral, manteniendo el resto de variables fijo.

Por otro lado, el coeficiente de la variable pe se ha triplicado en relación al estimado en el modelo (6.8) y es significativo. En cambio la variable que recoge el efecto de la introducción de la píldora anticonceptiva $pill$ no es significativa. De todas formas, hay que ser cautos con estos resultados de significatividad dado que el estadístico de Durbin-Watson toma un valor menor que el valor de la cota inferior obtenida para $T = 72$ y $K' = 4$ $DW = 0,350212 < d_L = 1,5029$ indicando evidencia de autocorrelación positiva en el término de perturbación de esta especificación. Dada la existencia de autocorrelación, los contrastes realizados en base a los resultados de la estimación MCO no son válidos para realizar inferencia.

Si tenemos en cuenta una estimación robusta a autocorrelación de las desviaciones típicas para realizar los contrastes de significatividad con las estimaciones por MCO de los coeficientes, las conclusiones no cambian. No mejoramos en cuanto a significatividad ni en cuanto a los signos de los coeficientes estimados.

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1913–1984 ($T = 72$)
Variable dependiente: gfr
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	111,7690	5,8204	19,2027	0,0000
t	−1,1498	0,3226	−3,5643	0,0007
pe	0,2788	0,0713	3,9077	0,0002
pill	0,9974	10,7323	0,0929	0,9262
ww2	−35,5923	7,5391	−4,7210	0,0000

Así y todo, vemos que la tasa de fertilidad también presenta un periodo, de 1936 a 1947, de tendencia creciente, por lo que podemos considerar ver qué ocurre si incluimos también una tendencia cuadrática, $tsq \equiv t^2$. El modelo a estimar en este caso sería entonces:

$$\mathrm{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 \mathrm{pe}_t + \beta_5 \mathrm{pill}_t + \beta_6 \mathrm{ww2}_t + u_t \tag{6.10}$$

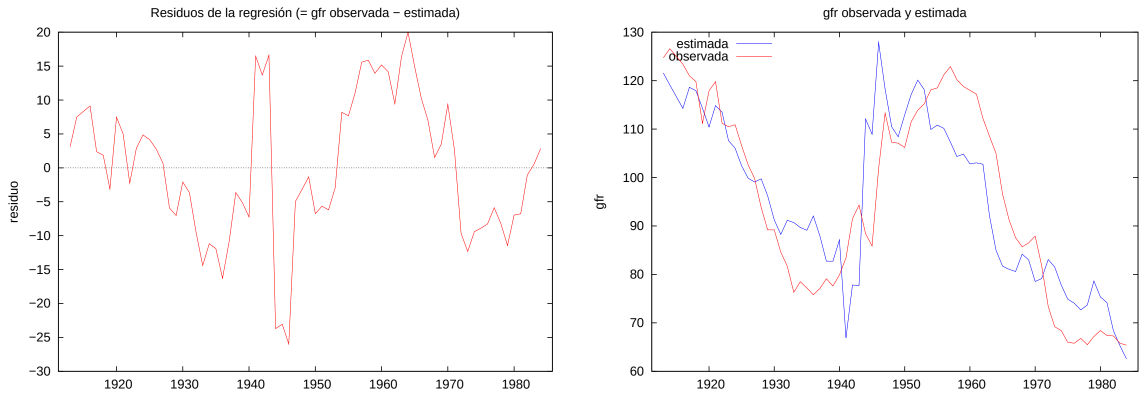
y los resultados de la estimación son los siguientes:

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1913–1984 ($T = 72$)
Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	124,0920	4,36074	28,4566	0,0000
t	−2,5314	0,38938	−6,5011	0,0000
tsq	0,0196	0,00497	3,9454	0,0002
pe	0,3478	0,04025	8,6392	0,0000
ww2	−35,8803	5,70792	−6,2861	0,0000
pill	−10,1197	6,33600	−1,5972	0,1150

R^2	0,726676	R^2 corregido	0,705970
$F(5, 66)$	35,09434	Valor p (de F)	2,44e–17
$\hat{\rho}$	0,742433	Durbin–Watson	0,514369

Figura 6.6: *Gráfico de residuos MCO y de la serie gfr observada y ajustada*



Los dos coeficientes de tendencia son significativos y, como era de esperar, de signo contrario; el coeficiente que acompaña a t es negativo, indicando la tendencia decreciente en promedio de la tasa de fertilidad, y el que acompaña a t^2 es positiva, recogiendo el hecho de que hay periodos en los que esa tendencia es creciente. El coeficiente de *pe* es incluso mayor cuantitativamente que antes, y estadísticamente significativo. Ahora el coeficiente estimado que acompaña a la variable *pill* tiene el signo esperado negativo pero sigue sin ser significativo. De todas formas, sigue existiendo evidencia de autocorrelación positiva[3], ya que $DW = 0,514369$ es menor que la cota inferior $d_L = 1,4732$ para $T = 72$ y $K' = 5$.

Teniendo en cuenta la autocorrelación a la hora de estimar la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO, los resultados de significatividad no cambian sustancialmente.

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1913–1984 ($T = 72$)
Variable dependiente: gfr
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	124,0920	4,88820	25,3860	0,0000
t	−2,5314	0,62030	−4,0809	0,0001
tsq	0,0196	0,00744	2,6330	0,0105
pe	0,3478	0,08289	4,1956	0,0001
pill	−10,1197	11,49250	−0,8805	0,3818
ww2	−35,8803	9,02103	−3,9774	0,0002

[3] Una posibilidad es incluir más elementos de tendencia $t^3, t^4 \dots$ tal que se llegaría a ajustar perfectamente la serie. Pero el interés en el análisis de regresión es capturar movimientos tendenciales generales de la serie a explicar con el objetivo de descubrir cuáles son las variables explicativas que afectan a gfr.

Las especificaciones anteriores consideran un modelo con autocorrelación en la perturbación que no parece ser adecuadamente recogida en media, incluso cuando incluimos una tendencia lineal y/o cuadrática. Por ello, parece sensato intentar una especificación del modelo donde incorporemos explícitamente dinámica en la parte sistemática.

B. Modelizaciones dinámicas: Incorporación de retardos de la variable endógena gfr o/y de la variable explicativa *pe*.

• Primeramente especificamos un modelo de retardos distribuidos incluyendo como regresores cuatro retardos consecutivos de la variable pe_t, es decir, añadimos pe_{t-1}, ..., pe_{t-4} a la lista de regresores del modelo 6.8. La especificación sería la siguiente:

$$\text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2\text{pe}_t + \beta_3\text{pe}_{t-1} + \beta_4\text{pe}_{t-2} + \beta_5\text{pe}_{t-3} + \beta_6\text{pe}_{t-4} + \beta_7\text{pill}_t + \beta_8\text{ww2}_t + u_t \quad (6.11)$$

Los resultados de la estimación por MCO se muestran a continuación:

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1917–1984 ($T = 68$)
Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	92,5016	3,32548	27,8160	0,0000
pe	0,0887	0,12618	0,7033	0,4846
pe_1	−0,0039	0,15311	−0,0260	0,9794
pe_2	0,0073	0,16510	0,0448	0,9644
pe_3	0,0180	0,15358	0,1177	0,9067
pe_4	0,0139	0,10502	0,1327	0,8948
pill	−31,0816	3,89687	−7,9761	0,0000
ww2	−21,3435	11,54080	−1,8494	0,0693

R^2	0,536811	R^2 corregido	0,482772
$F(7,60)$	9,933828	Valor p (de F)	3,63e–08
$\hat{\rho}$	0,862026	Durbin–Watson	0,215806

De partida, hemos perdido cuatro observaciones porque necesitamos ese número de condiciones iniciales para definir los retardos, luego nuestro tamaño de muestra disponible es ahora $T = 68$. En esta regresión solamente tenemos retardos de la variable exógena *pe* que consideramos regresores no estocásticos. Por lo tanto, si el resto de hipótesis básicas sobre el término de perturbación se satisfacen, podremos hacer inferencia válida en muestras finitas y el estimador MCO tendría buenas propiedades, tanto en muestras finitas como asintóticas.

La cuestión es que el valor del estadístico de Durbin-Watson indica con claridad que hay evidencia de autocorrelación positiva en el término de error, ya que $DW = 0,215806 < 1,3893 = d_L$ obtenida para $T = 68$ y $K' = 7$. Tenemos que contrastar la significatividad, individual y conjunta, a través de estadísticos válidos. Para ello, si seguimos utilizando el estimador de los coeficientes por MCO, debemos estimar consistentemente su matriz de varianzas y covarianzas. Los resultados en este caso son los siguientes:

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1917–1984 ($T = 68$)
Variable dependiente: gfr
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	92,5016	7,35339	12,5794	0,0000
pe	0,0887	0,08820	1,0062	0,3184
pe_1	−0,0039	0,06700	−0,0594	0,9529
pe_2	0,0073	0,08428	0,0877	0,9304
pe_3	0,0180	0,06640	0,2723	0,7863
pe_4	0,0139	0,07249	0,1923	0,8482
pill	−31,0816	5,07610	−6,1231	0,0000
ww2	−21,3435	10,41060	−2,0502	0,0447

R^2	0,536811	R^2 corregido	0,482772
$F(7, 60)$	12,70587	Valor p (de F)	7,09e–10
$\hat{\rho}$	0,862026	Durbin–Watson	0,215806

Contraste de omisión de variables –
Hipótesis nula: los parámetros son cero para $pe_{t-1}, pe_{t-2}, pe_{t-3}, pe_{t-4}$
Estadístico de contraste asintótico:
valor muestral del estadístico $\chi^2(4) = 0{,}392538$ con valor p = 0,982663

Contraste de omisión de variables –
Hipótesis nula: los parámetros son cero para $pe_t, pe_{t-1}, pe_{t-2}, pe_{t-3}, pe_{t-4}$
Estadístico de contraste asintótico: $\chi^2(5) = 12{,}1584$
con valor p = 0,045022

Contraste de omisión de variables por eliminación secuencial –
(nivel de significación 0, 05 a dos colas)
Quitando pe_{t-1} (valor p 0,953) no se rechaza que ese coeficiente sea cero
Quitando pe_{t-2} (valor p 0,960) no se rechaza que ese coeficiente sea cero
Quitando pe_{t-4} (valor p 0,846) no se rechaza que ese coeficiente sea cero
Quitando pe_{t-3} (valor p 0,605) no se rechaza que ese coeficiente sea cero

¿Introduce esta especificación algún otro problema conocido? ¿Hay un problema de multicolinealidad entre pe_t y sus retardos $pe_{t-1}, \ldots, pe_{t-4}$?

Vemos que los coeficientes de las variables pe_t y sus retardos $pe_{t-1}, \cdots, pe_{t-4}$ no son individualmente significativos. Por otro lado, al realizar el contraste de omisión de variables bajo la hipótesis nula de que los parámetros son cero para $pe_t, pe_{t-1}, pe_{t-2}, pe_{t-3}, pe_{t-4}$ conjuntamente se rechaza esa hipótesis. Por lo tanto, puede existir un problema de multicolinealidad entre pe_t y sus retardos. Si miramos a los coeficientes de correlación entre estas variables, vemos que son muchos cercanos a uno, indicando esa alta correlación entre estos regresores.

Coeficientes de correlación, usando las observaciones 1913 - 1984
(se ignoraron los valores perdidos)
valor crítico al 5 % (a dos colas) = 0,2319 para n = 72

pe	pe_1	pe_2	pe_3	pe_4	
1,0000	0,9636	0,9090	0,8554	0,7996	pe
	1,0000	0,9637	0,9097	0,8579	pe_1
		1,0000	0,9639	0,9111	pe_2
			1,0000	0,9645	pe_3
				1,0000	pe_4

Por otro lado, al realizar tanto el contraste secuencial, como el contraste conjunto de que solamente los coeficientes que acompañan a $pe_{t-1}, pe_{t-2}, pe_{t-3}, pe_{t-4}$ son igual a cero, no se rechaza la hipótesis nula en cada caso. Por lo tanto se puede decir que el problema no es tanto de multicolinealidad entre los propios retardos sino entre pe_t y ellos.

Si comenzamos con un número de retardos menor, por ejemplo dos, tenemos los mismos resultados:

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1915–1984 ($T = 70$)
Variable dependiente: gfr
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	95,8705	7,55497	12,6897	0,0000
pe	0,0726	0,07856	0,9250	0,3584
pe_1	−0,0057	0,07128	−0,0811	0,9356
pe_2	0,0338	0,07622	0,4438	0,6587
pill	−31,3050	5,29729	−5,9096	0,0000
ww2	−22,1265	7,58264	−2,9180	0,0049

R^2	0,498599	R^2 corregido	0,459427
$F(5, 64)$	15,66942	Valor p (de F)	4,75e–10
$\hat{\rho}$	0,875014	Durbin–Watson	0,188715

Contraste de omisión de variables –
Hipótesis nula: los parámetros son cero para las variables pe_t, pe_{t-1}, pe_{t-2}
Estadístico de contraste asintótico: valor muestral del estadístico $\chi^2(3) = 5{,}62982$ con valor p = 0,14243 no se rechaza la hipótesis nula

Contraste de omisión de variables –
Hipótesis nula: los parámetros son cero para las variables pe_{t-1}, pe_{t-2}
Estadístico de contraste: valor muestral del estadístico $F(2, 64) = 0{,}0995195$
con valor p = 0,905412 no se rechaza la hipótesis nula

Por ello, parece que incluir retardos de pe_t no mejora la especificación del modelo, sigue existiendo autocorrelación en el error, y la multicolinealidad entre pe_t y sus retardos hace que se estime de forma imprecisa el efecto contemporáneo de la exención de impuestos sobre la tasa de fertilidad.

Veamos otra alternativa de introducir dinámica en el modelo.

• Seguidamente especificamos un modelo dinámico incluyendo como regresores cuatro retardos consecutivos de la variable endógena gfr_t, es decir, añade $gfr_{t-1}, \ldots, gfr_{t-4}$ a la lista de regresores del modelo (6.8).

$$\mathrm{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 \mathrm{pe}_t + \beta_3 \mathrm{pill}_t + \beta_4 \mathrm{ww2}_t + \beta_5 gfr_{t-1} + \beta_6 gfr_{t-2} + \beta_7 gfr_{t-3} + \beta_8 gfr_{t-4} + u_t \quad (6.12)$$

En este caso lo regresores incluidos son estocásticos, ya que aunque determinadas en el pasado, o predeterminadas en t, han sido generadas por las propias perturbaciones pasadas del modelo, de ahí que sean variables aleatorias gfr_{t-1}, gfr_{t-2}, gfr_{t-3}, gfr_{t-4}. El estimador MCO es sesgado y no se conoce su distribución exacta o en muestras finitas pero si las perturbaciones del modelo son un ruido blanco, el estimador será consistente y los estadísticos t y F válidos asintóticamente.

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1917–1984 ($T = 68$)
Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	8,43045	3,15685	2,6705	0,0097
pe	0,02864	0,00967	2,9599	0,0044
pill	−5,34771	1,49830	−3,5692	0,0007
ww2	−2,52153	2,04522	−1,2329	0,2224
gfr_1	1,14486	0,12777	8,9601	0,0000
gfr_2	−0,58858	0,18519	−3,1782	0,0023
gfr_3	0,46819	0,18511	2,5292	0,0141
gfr_4	−0,13390	0,12220	−1,0958	0,2776

R^2	0,966703	R^2 corregido	0,962818
$F(7, 60)$	248,8517	Valor p (de F)	7,40e–42
$\hat{\rho}$	−0,048412	Durbin–Watson	2,088677

Por el contrario, si se detecta autocorrelación en el término de error, entonces el estimador MCO no será consistente y la inferencia tampoco será válida. Por esa razón es importante contrastar si hay o no evidencia de autocorrelación. Para ello, el estadístico de Durbin-Watson no es fiable, dado que como regresores tenemos retardos de la variable endógena. Utilizaremos el contraste de Breusch-Godfrey. Contrastamos la hipótesis nula de que el término de perturbación es un ruido blanco, frente a la alternativa de que sigue un proceso AR(1) o MA(1).

El resultado del contraste se muestra a continuación:

Contraste Breusch-Godfrey de autocorrelación de primer orden MCO, usando las observaciones 1917-1984 (T = 68)
Variable dependiente: uhat

	Coeficiente	Desv. Típica	Estad. t	Valor p
const	-3,78284	4,20750	-0,8991	0,3723
pe	-0,01652	0,01557	-1,0610	0,2930
$pill$	2,83789	2,57773	1,1010	0,2754
$ww2$	1,53037	2,32700	0,6577	0,5133
gfr_1	0,58349	0,45098	1,2940	0,2008
gfr_2	-0,65901	0,52223	-1,2620	0,2119
gfr_3	0,29550	0,28607	1,0330	0,3058
gfr_4	-0,16737	0,17361	-0,9641	0,3390
$uhat_1$	-0,61992	0,45977	-1,3480	0,1827

El coeficiente de determinación de esta regresión auxiliar es $R^2 = 0,029892$, y el valor muestral del estadístico: $TR^2 = 2,032657$ con un valor p de 0,154. Dado el valor p asociado al valor muestral del estadístico del contraste de Breusch-Godfrey no se rechaza la hipótesis nula de que el término de perturbación sea un ruido blanco frente a la alternativa de que siga un AR(1) o MA(1). Por lo tanto, no parece haber evidencia de autocorrelación hasta de orden uno.

Podemos considerar como fiables los resultados para hacer inferencia, al menos válida asintóticamente, sobre la significatividad de las variables incluidas. Todas las variables son individualmente significativas a excepción de la variable ww_2 que recoge el periodo de la segunda guerra mundial y el cuarto retardo de la variable endógena gfr_{t-4}.

• Consideramos incluir todos los retardos de pe y gfr de las especificaciones anteriores en el modelo (6.8). El modelo más general sería:

$$\begin{aligned} \text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2\text{pe}_t + \beta_3\text{pe}_{t-1} + \beta_4\text{pe}_{t-2} + \beta_5\text{pe}_{t-3} + \beta_6\text{pe}_{t-4} + \beta_7\text{pill}_t + \\ \beta_8\text{ww2}_t + \beta_9 gfr_{t-1} + \beta_{10} gfr_{t-2} + \beta_{11} gfr_{t-3} + \beta_{12} gfr_{t-4} + u_t \end{aligned} \tag{6.13}$$

Los resultados de la estimación de este modelo y del contraste de Breusch-Godfrey para contrastar si el término de perturbación es un ruido blanco frente a que siga un AR(1) o MA(1) se muestran a continuación:

Estimaciones MCO, usando las observaciones 1917–1984 ($T = 68$)
Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	7,21746	2,96855	2,4313	0,0183
pe	−0,03757	0,03196	−1,1754	0,2448
pe_1	0,03203	0,03940	0,8128	0,4198
pe_2	0,09221	0,04277	2,1556	0,0354
pe_3	−0,06771	0,04170	−1,6237	0,1101
pe_4	0,00404	0,02925	0,1382	0,8906
pill	−4,70508	1,51670	−3,1022	0,0030
ww2	0,28547	3,22531	0,0885	0,9298
gfr_1	1,12341	0,13766	8,1604	0,0000
gfr_2	−0,44953	0,18893	−2,3793	0,0208
gfr_3	0,33774	0,17747	1,9030	0,0622
gfr_4	−0,10568	0,12009	−0,8800	0,3826

R^2	0,972925	R^2 corregido	0,967606
$F(11, 56)$	182,9370	Valor p (de F)	1,08e–39
$\hat{\rho}$	−0,042547	Durbin–Watson	2,068701

El coeficiente de determinación de esta regresión auxiliar es $R^2 = 0,028959$, y el valor muestral del estadístico: $TR^2 = 1,969205$ con un valor p de 0,161. Dado el valor p asociado al valor muestral del estadístico del contraste de Breusch-Godfrey no se rechaza la hipótesis nula de que el término de perturbación sea un ruido blanco frente a la alternativa de que siga un AR(1) o MA(1). Por lo tanto, no parece haber evidencia de autocorrelación hasta de orden uno. Podemos considerar como fiables los resultados para hacer inferencia al menos válida asintóticamente sobre la significatividad de las variables incluidas.

Contraste Breusch-Godfrey de autocorrelación de primer orden MCO, usando las observaciones 1917-1984 (T = 68) Variable dependiente: uhat

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	-3,711730	4,136670	-0,8973	0,3735
pe	-0,007805	0,032362	-0,2412	0,8103
pe_1	0,030136	0,045708	0,6593	0,5124
pe_2	-0,024036	0,046493	-0,5170	0,6072
pe_3	-0,059447	0,062240	-0,9551	0,3437
pe_4	0,045326	0,045809	0,9895	0,3268
$pill$	2,892880	2,715980	1,0650	0,2915
$ww2$	0,238492	3,212430	0,0742	0,9411
gfr_1	0,662843	0,535351	1,2380	0,2209
gfr_2	-0,735456	0,604202	-1,2170	0,2287
gfr_3	0,248948	0,262536	0,9482	0,3472
gfr_4	-0,124160	0,153815	-0,8072	0,4230
$uhat_1$	-0,685005	0,534860	-1,2810	0,2057

- A continuación omitimos de forma secuencial todas las variables que encontramos no significativas al nivel de significación del 5 %, incluyendo variables retardadas y no retardadas.

  Eliminación secuencial utilizando alfa= 0,05 a dos colas

Quitando ww2	(valor p 0,930)	no se rechaza que el coeficiente sea cero
Quitando pe_{t-4}	(valor p 0,907)	no se rechaza que el coeficiente sea cero
Quitando pe_{t-1}	(valor p 0,403)	no se rechaza que el coeficiente sea cero
Quitando gfr_{t-4}	(valor p 0,327)	no se rechaza que el coeficiente sea cero
Quitando pe_t	(valor p 0,270)	no se rechaza que el coeficiente sea cero

  Hipótesis nula: los parámetros de regresión asociados a $pe_t, pe_{t-1}, pe_{t-4}, ww2, gfr_{t-4}$ son cero.

  Estadístico de contraste: F(5, 56) = 0,567449, con valor p = 0,724516 no se rechaza.

  Por lo tanto, la especificación final sería:

  $$\text{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 \text{pe}_{t-2} + \beta_3 \text{pe}_{t-3} + \beta_4 \text{pill}_t + \beta_5 gfr_{t-1} + \beta_6 gfr_{t-2} + \beta_7 gfr_{t-3} + u_t \tag{6.14}$$

  Estimaciones MCO, usando las observaciones 1917–1984 ($T = 68$)
  Variable dependiente: gfr

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	6,77128	2,79399	2,4235	0,0184
pe_2	0,09150	0,02395	3,8199	0,0003
pe_3	−0,06207	0,02510	−2,4726	0,0162
pill	−5,13607	1,38690	−3,7033	0,0005
gfr_1	1,06757	0,11527	9,2609	0,0000
gfr_2	−0,40369	0,16115	−2,5051	0,0149
gfr_3	0,23931	0,10765	2,2230	0,0299

R^2	0,971553	R^2 corregido	0,968755
$F(6, 61)$	347,2224	Valor p (de F)	3,41e–45
$\hat{\rho}$	0,015698	h de Durbin	0,388041

  Contraste Breusch-Godfrey de autocorrelación de primer orden MCO, usando las observaciones 1916-1984 (T = 69)
  Variable dependiente: uhat

	Coeficiente	Desv. Típica	Estad. t	Valor p
const	0,398790	3,1035	0,1285	0,8982
pe_2	0,000711	0,02436	0,02918	0,9768
pe_3	0,000818	0,02542	0,03219	0,9744
$pill$	-0,262979	1,65241	-0,1591	0,8741
gfr_1	-0,060770	0,240580	-0,2526	0,8014
gfr_2	0,064050	0,275406	0,2326	0,8169
gfr_3	-0,008623	0,111933	-0,07704	0,9388
$uhat_1$	0,077286	0,268101	0,2883	0,7741

  El coeficiente de determinación de esta regresión auxiliar es $R^2 = 0,001360$, y el valor muestral del estadístico: $TR^2 = 0,093872$ con un valor p de 0,759. No hay evidencia de autocorrelación hasta de orden uno.

Esta especificación dinámica parece adecuada, las variables son individual y conjuntamente significativas y no hay evidencia de que el término de perturbación no sea un ruido blanco.

Finalmente podemos decir que la existencia de autocorrelación en las especificaciones anteriores se debía a una mala especificación del modelo y que incluyendo dinámica en la parte sistemática mediante las variables gfr_{t-1}, gfr_{t-2}, gfr_{t-3}, pe_{t-2}, pe_{t-3} la hemos controlado.

6.4. Anexo 6.1: Instrucciones básicas de gretl para modelos dinámicos

• Añadir retardos de la variable dependiente y/o de las variables exógenas como regresores al estimar por MCO
Modelo → Mínimos Cuadrados Ordinarios
En la ventana de gretl: especificar modelo elegir la variable dependiente y añadir las variables exógenas corrientes, en el mismo t. Entonces se ve remarcada la opción de *Retardos*. Al elegir con el botón izquierdo aparece una ventana orden de retardos.

Si se quieren incluir retardos, por ejemplo de RD del 0 al 4 se especifica en la parte izquierda de la caja al lado de la variable correspondiente.

En este caso el modelo especificado será

$$PATENTS_t = b1 + b2RD_t + b3RD_{t-1} + b4RD_{t-2} + b5RD_{t-3} + b6RD_{t-4} + u_t$$

Donde $t = 5, \ldots, T$, se pierden 4 observaciones del total T disponible al definir RD_{t-4}.

Si solamente se quiere incluir el cuarto retardo además de RD_t, esto es, el modelo:

$$PATENTS_t = b1 + b2RD_t + b3RD_{t-4} + u_t$$

Entonces se elige la casilla de *retardos específicos* y se escribe en la caja correspondiente para ello los valores $0, 4$.

Si se quiere añadir al modelo retardos de la variable endógena como regresores en la ventana de orden de retardos se marca la opción *Retardos de la variable dependiente*. De igual forma si se quieren introducir un continuo de retardos del 1 al 2 por ejemplo se seleccionan en la parte izquierda el intervalo de valores.

$$PATENTS_t = b1 + b2RD_t + b3RD_{t-4} + b4PATENTS_{t-1} + b5PATENTS_{t-2} + u_t$$

Si son retardos de la variable dependiente alternos, se selecciona la ventana retardos específicos y se indica cuales en concreto, por ejemplo 1,3 introduce como regresores $PATENTS_{t-1}$ y $PATENTS_{t-3}$ pero no introduce el segundo retardo.

$$PATENTS_t = b1 + b2RD_t + b3RD_{t-4} + b4PATENTS_{t-1} + b5PATENTS_{t-3} + u_t$$

• Añadir retardos al estimar por Variables Instrumentales tanto en los regresores como en la lista de instrumentos.

Modelo → Otros modelos lineales → Mínimos Cuadrados en dos etapas

En la ventana gretl: *especificar modelo* tenemos que elegir la variable dependiente, las variables explicativas en t o corrientes y los instrumentos que estarán en la lista en t.

Se pulsa en retardos y aparece una ventana donde se tienen que seleccionar los retardos de las variables que aparecen en el modelo como regresores, tanto de variables exógenas como de la dependiente y también las variables que vamos a usar como instrumentos.