



Konputagailuen Arkitektura I

Aritmetikoak 1 (ebazpena). RCA serie batugailua

Serie batugailu batean (RCA, CPA) bi zenbaki arrunt hauek batzen dira, $S = A + B$ izanik:

$$\begin{array}{r} A: \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ B: \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline S: \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Bete ezazu hurrengo taula: bertan adierazi behar dituzu 2Δ denbora-tarteetan sortzen diren emaitza partzialak, baturak zein bururakoak.

Kasu konkretu honetarako, zein da batugailuaren atzerapena?

Kontuan izan A_i eta B_i bitak batzean S_i eta C_{i+1} lortzen direla (hala, $A_0 + B_0 = S_0$, eta C_1 , hurrengo bitetara doan bururakoa; hurrengo bitetan: $C_1 + A_1 + B_1 = S_1$, eta C_2 bururako, etab.).

	S7 S6 S5 S4 S3 S2 S1 S0	C8 C7 C6 C5 C4 C3 C2 C1
2Δ		
4Δ		
6Δ		
8Δ		
10Δ		
12Δ		
14Δ		
16Δ		

Ebazpena

Ariketa hau ebazteko, RCA batugailuaren kasu orokorra adieraziko dugu lehenik:

$$\begin{array}{r} C_{in}: \quad C7\ C6\ C5\ C4\ C3\ C2\ C1\ C0 \\ A: \quad A7\ A6\ A5\ A4\ A3\ A2\ A1\ A0 \\ B: \quad B7\ B6\ B5\ B4\ B3\ B2\ B1\ B0 \\ \hline S: \quad S7\ S6\ S5\ S4\ S3\ S2\ S1\ S0 \\ C_{out}: \quad C8\ C7\ C6\ C5\ C4\ C3\ C2\ C1 \end{array}$$

Hortaz, une batean posizio baten irteera gisa lortzen den bururakoa (C_{out}), hurrengo unean hurrengo posizioaren sarrerako bururakoa izango da (C_{in}), hau da, posizio bat eskerrerantz desplazatu behar da uneko irteerako bururakoa hurrengo unean batu ahal izateko.

Ariketa hau ebazteko abiapuntua hau da: hasieran, bururako guztiak 0 dira. Hala, lehenengo unean egiten den batuketa hau da:

$$\begin{array}{r} C_{in}: \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ A: \quad \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ B: \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

RCA batugailua serie batugailua denez, bit bateko hainbat batugailuk osatzen dute (bit kopuru adina batugailu, zehatz-mehatz; kasu honetan, beraz, 8 batugailu seriean konektatuta: hau da, eskuinekoaren irteerako bururakoa haren ezkerrean dagoenaren sarrerako bururakoa da; esaten da, baita ere, batugailu hauetan bururakoa hedatu egiten dela ezkerrerantz). Bit bateko batugailuen erantzun-denbora 2Δ da batugaiak eta sarrerako bururakoa egonkorrak diren unetik kontatuta. Bururakoa hedatzen denez, ezkerrerantzko hedapen edo urrats bakoitzean 2Δ gehiago atzeratuko da emaitza. Gogora dezagun bit bateko batugailuaren funtzionamendua:

$$\begin{array}{l} C_{in} + A + B = S \text{ eta } C_{out} \text{ bururako} \\ 0 + 0 + 0 = 0 \text{ eta } 0 \text{ bururako} \\ 0 + 0 + 1 = 1 \text{ eta } 0 \text{ bururako (propietate trukakorraz: } 0 + 0 + 1 = 0 + 1 + 0 = 1 + 0 + 0) \\ 0 + 1 + 1 = 0 \text{ eta } 1 \text{ bururako (propietate trukakorraz: } 0 + 1 + 1 = 1 + 0 + 1 = 1 + 1 + 0) \\ 1 + 1 + 1 = 1 \text{ eta } 1 \text{ bururako} \end{array}$$

Hori kontuan hartuz, hauek dira RCA batugailuaren emaitza partzialak (S eta C, batura eta irteerako bururakoa, hurrenez hurren) 2Δ pasatu direnean:

$$\begin{array}{r} C_{0\Delta}: \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \quad \quad \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline S_{2\Delta}: \quad 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ C_{2\Delta}: \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Eta lehenengo emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko, kontuan hartuz lortu ditugun baturak $S_7 - S_0$ direla, eta bururakoak, berriz, $C_8 - C_1$, hau da, esan dugun bezala, hurrengo unean ezkerreko bitei batuko zaien bururakoa. Hala:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1

Hala, aurreko bururakoak dira hurrengo 2Δ denbora-tartean batzen direnak, ezkerretara posizio bat desplazatuta, honela:

$$\begin{array}{r} C_{2\Delta} \leftarrow: \quad 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \quad \quad \quad \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \quad \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline S_{4\Delta}: \quad \quad 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ C_{4\Delta}: \quad \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

Eta bigarren emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
4Δ	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1

Orain arte lortutako bi lerro horietako emaitzak alderatuz gero, konturatuko gara balioetako batzuk ez direla aldatu lehenengo lerrotik bigarren lerroa, eta beste batzuk bai, ordea. Arrazoia da emaitza partzial batzuk 2Δ denbora-tartean jadanik egonkortzen direla, eta beste batzuek, ordea, denbora luzeagoa behar dutela. Hiru kasu bereiz ditzakegu:

- Batugaiak $1 + 1$ direnean, ez du axola zein den bi bit horiei batu behar zaien bururakoa, irteerako bururakoa beti 1 izango baita ($1 + 1 + 0$ izan, ala $1 + 1 + 1$ izan, bururakoa 1 da bi kasuetan): hau da, esaten da $1 + 1$ egiten dugunean, bururakoa sortzen dutela bi bit horiek, eta 2Δ unean jadanik egonkorra izango da. Ariketa honetan, bi batugai horiekin, hori gertatzen da C1, C5 eta C6 bururakoaren kasuan. Batura partzialari dagokionez, berriz, ez da hori gertatzen, ez delako berdina $0 + 1 + 1$ ($= 0$, eta 1 bururako) egitea, ala $1 + 1 + 1$ ($= 1$, eta 1 bururako). Horregatik, baturaren emaitza egonkortuko da sarrerako bururakoa egonkortu ondoren, inoiz ez lehenago. Hala, S4 eta S5 bitak ez dira egonkorrak izango 2Δ unean. Kasu partikularra S0 da, sarrerako bururakoa, C0, beti 0 izango dela suposatzen dugulako. Hala, 2Δ unean S0 ere egonkorra da, 0 balioa hartu du.
- Batugaiak 0 eta 1 direnean (propietate trukakorraz ez du axola batugaien ordenak), berriz, ez batura eta ez bururakoa ez dira egonkortzen sarrerako bururakoa egonkortu arte. Arrazoia da ez dela gauza bera $0 + 1 + 0$ ($= 1$, eta 0 bururako) egitea, ala $1 + 1 + 0$ ($= 0$, eta 1 bururako). Kasu honetan esaten da bi bit horiek (0 eta 1) sarreran jasotzen duten bururakoa hedatu egiten dutela, hurrengo bitei pasatuz. Ariketa honetan, bi batugai horiekin, hori gertatzen da S1, S2, S3, S6 baturen kasuetan, eta C2, C3, C4 eta C7 bururakoaren kasuetan.
- Azkenik, batugaiak 0 eta 0 direnean, irteerako bururakoa beti izango da 0 , ez du axola zein den sarrerako bururakoaren balioa. Baina batura bai sarrerako bururakoaren menpekoa izango da: $1 + 0 + 0 = 1$, eta 0 bururako; $0 + 0 + 0 = 0$, eta 0 bururako. Kasu honetan, bi bit horiek ez dute sortzen ez eta hedatzen ere sarrerako bururakoa; aitzitik, sarrerako bururakoaren bidea moztu edo oztopatu egiten dute, ezkererantz jarrai ez dezan. Ariketa honetan, pisu handieneko bitetan gertatzen da kasu hau. Hortaz, aurrera jarraitu baino lehen jadanik esan dezakegu $C8 = 0$ izango dela 2Δ unetik aurrera, erabat egonkorra, baina S7 ez.

Laburbilduz, 2Δ unean jadanik egonkortu dira S0, C8, C6, C5 eta C1. Dena den, taulan badaude beste balio batzuk 2Δ eta 4Δ uneetan berdinak direnak (S2, S3, S4, esate baterako), baina ez dira egonkorrak (b) kasuari dagozkiolako, hau da, irteera egonkortzeko lehenik eskuineko bitek hedatutako bururakoa egonkortu behar da.

Aurreko uneko bururakoak dira hurrengo 2Δ denbora-tartean batzen direnak, ezkerretara posizio bat desplazatuta, honela:

$$\begin{array}{r}
 C_{4\Delta} \leftarrow: 11100110 \\
 \phantom{C_{4\Delta} \leftarrow: } 01111011 \\
 \phantom{C_{4\Delta} \leftarrow: } 00110101 \\
 \hline
 S_{6\Delta}: 10101000 \\
 C_{6\Delta}: 01110111
 \end{array}$$

Eta hirugarren emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
4Δ	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
6Δ	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1

Orain, 4Δ eta 6Δ uneetako emaitzak alderatuz, esan dezakegu 4Δ unean S1, S5, S6, C2 eta C7 egonkortu direla.

Hurrengo denbora-tarteko batuketa hau da:

$$\begin{array}{r}
 C_{6\Delta} \leftarrow: 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
 \phantom{C_{6\Delta} \leftarrow:} 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \phantom{C_{6\Delta} \leftarrow:} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 \hline
 S_{8\Delta}: 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 C_{8\Delta}: 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1
 \end{array}$$

Eta laugarren emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
4Δ	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
6Δ	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
8Δ	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Orain, 6Δ eta 8Δ uneetako emaitzak alderatuz, esan dezakegu 6Δ unean S2, S7 eta C3 egonkortu direla.

Hurrengo denbora-tarteko batuketa hau da:

$$\begin{array}{r}
 C_{8\Delta} \leftarrow: 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
 \phantom{C_{8\Delta} \leftarrow:} 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \phantom{C_{8\Delta} \leftarrow:} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 \hline
 S_{10\Delta}: 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 C_{10\Delta}: 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1
 \end{array}$$

Eta bostgarren emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
4Δ	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
6Δ	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
8Δ	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
10Δ	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Orain, 8Δ eta 10Δ uneetako emaitzak alderatuz, esan dezakegu 8Δ unean S3 eta C4 egonkortu direla. Horrez gain, agerikoa da bururakoak berdinak direla azken bi lerroetan. Horrek esan nahi du bururako guztiak jadanik direla egonkorak, eta ez direla aldatuko hurrengo uneetan. Baina baturako bit bat oraindik egonkortu gabe dagoela dirudi. Horregatik, azken urratsa aztertuko dugu:

$$\begin{array}{r}
C_{10\Delta} \leftarrow: \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{array} \\
\hline
S_{12\Delta}: \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \\
C_{12\Delta}: \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}
\end{array}$$

Eta seigarren emaitza partzial hori taulan idatz dezakegu dagoeneko:

	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0	C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1
2Δ	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
4Δ	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
6Δ	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
8Δ	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
10Δ	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
12Δ	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Hortaz, 10Δ pasatzen direnean, bit guztiak egonkorak dira, S4 10Δ unean egonkortu delako, eta horregatik 12Δ eta 10Δ unetako emaitzak guztiz berdinak dira, eta hala izango dira hortik aurrera, bururakoak jadanik ez direlako aldatuko. Beraz, kasu honen atzerapena hori da, 10Δ hain zuzen ere.

Beste modu honetan ere ikus dezakegu noiz egonkortzen diren bit guztiak, kontuan hartuz zein bitek sortzen duten bururakoa (1 + 1, sortu bururakoa 2Δ atzerapenarekin, baina batura egonkortuko da haien sarrerako bururakoa egonkortu eta 2Δ geroago), zeintzuek hedatzen duten (1 + 0, edo 0 + 1, 2Δ gehituz hedapen-urrats bakoitzean, bai hedatuko den bururakoari eta baita baturari ere), eta zeintzuek geldiarazten duten (0 + 0, haien irteerako bururakoa egonkorra izango da 2Δ unetik aurrera, baina haien batura sarrerako bururakoa jasotzen duten unetik 2Δ geroago egonkortuko da):

C8	C7	C6	C5	C4	C3	C2	C1	
2Δ	4Δ	2Δ	2Δ	8Δ	6Δ	4Δ	2Δ	
0	1	1	1	1	1	1	1	
	0	1	1	1	1	0	1	A
	0	0	1	1	0	1	0	B
	1	0	1	1	0	0	0	
	6Δ	4Δ	4Δ	10Δ	8Δ	6Δ	4Δ	2Δ
	S7	S6	S5	S4	S3	S2	S1	S0

Honela irakurtzen da batuketa hori eskuinetik hasita ezkerrerantz mugituz:

A0 + B0: 1 gehi 1, 0 (S0) eta 1 bururako (C1): **sortu**, 2Δ unean dira egonkorak batura eta bururakoa, S0 eta C1.

C1 + A1 + B1: 1 gehi 1 gehi 0, 0 (S1) eta 1 bururako (C2): **hedatu**, sarrerako bururakoa (C1) iritsi den unetik 2Δ gehiago behar dute batura eta bururakoa egonkortzeko; hala, sarrerako bururakoa 2Δ unean iritsi denez, hauen irteerak, S1 eta C2, 4Δ unean egonkortuko dira.

C2 + A2 + B2: 1 gehi 0 gehi 1, 0 (S2) eta 1 bururako (C3): **hedatu**, sarrerako bururakoa (C2) iritsi den unetik 2Δ gehiago behar dute batura eta bururakoa egonkortzeko; hala, sarrerako bururakoa 4Δ unean iritsi denez, hauen irteerak, S2 eta C3, 6Δ unean egonkortuko dira.

C3 + A3 + B3: 1 gehi 1 gehi 0, 0 (S3) eta 1 bururako (C4): **hedatu**, sarrerako bururakoa (C3) iritsi den unetik 2Δ gehiago behar dute batura eta bururakoa egonkortzeko; hala, sarrerako bururakoa 6Δ unean iritsi denez, hauen irteerak, S3 eta C4, 8Δ unean egonkortuko dira.

C4 + A4 + B4: 1 gehi 1 gehi 1, 1 (S4) eta 1 bururako (C5): **sortu**, beraz, bururakoa (C5) 2Δ unetik aurrera da egonkorra, baina batura sarrerako bururakoa (C4) iritsi den unetik 2Δ beranduago; hala, sarrerako bururakoa 8Δ unean iritsi denez, hauen batura (S4) 10Δ unean egonkortuko da.

C5 + A5 + B5: 1 gehi 1 gehi 1, 1 (S5) eta 1 bururako (C6): **sortu**, beraz, bururakoa (C6) 2Δ unetik aurrera da egonkorra, baina batura sarrerako bururakoa (C5) iritsi den unetik 2Δ beranduago; hala, sarrerako bururakoa 2Δ unean iritsi denez, hauen batura (S5) 4Δ unean egonkortuko da.

C6 + A6 + B6: 1 gehi 1 gehi 0, 0 (S6) eta 1 bururako (C7): **hedatu**, sarrerako bururakoa (C6) iritsi den unetik 2Δ gehiago behar dute batura eta bururakoa egonkortzeko; hala, sarrerako bururakoa 2Δ unean iritsi denez, hauen irteerak, S6 eta C7, 4Δ unean egonkortuko dira.

C7 + A7 + B7: 1 gehi 0 gehi 0, 1 (S7) eta 0 bururako (C8): **geldiarazi**, irteerako bururakoa (C8) 2Δ unetik aurrera da egonkorra, baina batura sarrerako bururakoa (C7) iritsi den unetik 2Δ beranduago; hala, sarrerako bururakoa 4Δ unean iritsi denez, hauen batura (S7) 6Δ unean egonkortuko da.