Zenbakiak (1)

1 Zenbakiaren nozioa

Zenbakia entitate abstraktua da, kantitate ala neurri jakin bat irudikatzen duena. Zenbakiak maneiatzeko sinboloak erabiltzen dira (digituak). Maiz zenbakiaren nozioa eta bere sinboloa baliokide gisa erabiltzen dira.

Zenbatu eta neurtzeaz aparte, zenbakiek bestelako erabilpenik ere izan badute: etiketa moduan (esaterako telefonoak), kode eran (ISBN) ala ordenazioak adierazteko.

Matematika arloan, zenbakiaren kontzeptua zabalduz joan da eta egun, zenbaki arruntez aparte, abstrakzio handiagokoak ere egon badaude: zenbaki negatiboak, arrazionalak, irrazionalak et konplexuak.

Eragiketa matematikoen bidez zenbaki batzuetatik abiaturik, zenbaki berriak ateratzen dira. Eragiketa hauek bakun ala bitarrak izan daitezke.

Eragiketa bakunetan argumentu ala operadore bakar bat dago, adibidez: *balio absolutua* ($|-2|=2$ ala zenbaki arrunt bateko *faktoriala* (4! = 4 x 3 x 2 x 1) ala *zenbaki aurkako* (3 zenbakiaren aurkakoa -3). Aitzitik, eragiketa bitarretan bi argumentu dira beharrezko eta hala suertatzen da *batuketan*, *kenketan*, *biderketan*, *zatiketan* eta *berreketan*. Eragiketa matematikoon aztertzearen ardura hartzen duen arlo matematikoa, aritmetika da.

Zenbakiei tradizionalki bi zentzu nagusi eransten zaie: kardinal eta ordinal zentzuak.

Kardinal zentzua multzo bateko kopuruarekin dago lotuta.

Demagun A izeneko multzoa. A-k hiru elementu baditu zera deritzogu |A| = 3 ala kard (A) = 3. Multzo bateko kardinala, beraz, multzo horren izena da, elementu kopuruaz aparte. Multzo batek elementurik izan ezean, *multzo hutsa* aipatzen zaio eta ondoko hau da bere sinboloa: Ø .

Bi multzok kardinal berbera dutenean, elementu kopuru berbera daukate eta bi multzootako elementuen arteko korrespondentzia bijektiboa egin daiteke.

Bi multzoen arteko banan-banako korrespondentzia bijektiboa izaten da hasierako multzo bateko elementu orok lotura bakarra badute bigarren multzoko elementuen artean eta, aldi berean, bigarren multzoko elementu guztiek hasierako multzoko elementuren batekin korrespondentziarik izanez gero.

Adibidez, kotxe-bolanteen multzoa eta automobilen multzoen artean banan-banako korrespondentzia egin daiteke; hau da bolante guztiek (hasierako multzoa) dute lotura kotxeen multzoko elementu batekin; izan ere ez dago kotxerik gabeko bolanterik ala bolante bera konpartitzen duten bi kotxerik. Bestalde, kotxe guztiek dute bolante bana.

Ildo honetan, aipatu beharra dago kardinal bera izateak ez duela adierazten multzo berbera izaterik. Bi multzo A eta B, non A = {2,3,4,5} eta B = {1,2,3,4}. A eta B ez dira multzo berberak baina kardinal bera dute (|A|=|B|=4); izan ere, haien elementuen arteko banan banako korrespondentzia egin daiteke.

Ordinal zentzua, haatik, zenbakien sekuentzia gorakor ordenatuarekin loturik dago eta adierazten du zenbaki batek duen posizioa sekuentzia horretan. Hala, *a, b, c, d* sekuentzia, *a* lehenengo elementua da; *b*, bigarrena; *c*, hirugarrena eta abar.

Ikuspegi matematikotik, zenbaki arrunt bakoitza bera baino txikiagoak diren zenbakiez dago osatuta eta, hala, 4 = {0, 1, 2, 3}. Ildo honetatik, zenbaki arrunt bakoitza multzo ordenatua da eta zenbaki jakin bat beste baten bat baino handiagoa izango da baldin eta bigarren zenbakia lehenengoaren multzokoa bada.

2 Zenbakien birpasa

Zenbaki arruntak

Zenbakirik ezagunen eta erabilienak, *zenbaki arruntak* dira; izan ere, hauek eguneroko zenbaketak egitekoak dira: 1, 2, 3, ...

Zenbaki arrunten artean hiru tipo dira aipagarri: zenbaki *lehenak*, zenbaki *konposatuak* eta zenbaki *perfektuak*.

Zenbaki arrunt batek soilik 1 eta zenbaki bera zatitzaile dituenean, ***zenbaki lehena*** deritzogu. Beraz, 20tik beherako zenbaki lehenak ondoko hauek dira: *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19* (aintzat har ezazu zenbaki bikoitiak zein bakoitiak daudela).

Zenbaki lehenen multzoa, zenbaki arrunten azpimultzoa da eta aurreko baldintza betetzen duten zenbaki oro daude ("1" zenbakia izan ezik, zergatia begira ezazu hemen).

Bestalde, bi zatitzaile edo gehiagok duten zenbakiei ***konposatu*** deitzen zaie (zatitzaileen artean ez da 1 zenbakia kontuan hartzen) eta 20tik beherako zenbaki konposatuak honako hauek dira: *4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20*.

Aritmetikan teorema batek dio *1* baino handiago diren zenbaki arrunt konposatu guztiak adieraz daitezkeela zenbaki lehenen bidezko faktorizazio gisa eta faktorizazio hau bakarra dela.

Esaterako: 26 = 2 x 13 = 13 x 2 // 24 = 2 x 2 x 2 x 3 = 3 x 2 x 2 x 2 = ... // 36 = 2 x 2 x 3 x 3 = 3 x 3 x 2 x 2 = ... eta abar

Gogoratzeko: zatigarritasuna eta faktorizazioa.

Eratostenes-en bahea

Zenbaki lehen txikiak aurkitzeko erarik azkarrena, Eratostenes-en bahea dugu.

Berau ondoko honetan datza: *1* eta *a-ren* arteko zenbaki lehen oro aurkitzeko, $\sqrt{a}$ baino txikiagoak diren zenbaki lehenen multiploak ezabatu behar dira.

Demagun 31 baino txikiagoak diren zenbaki lehenak topatu gura dituzula. Beraz, 2*, 3* eta *5* zenbaki lehenen multiploak ezabatu beharko($\sqrt{31}=5{,}57$):

a.) Idatzi zenbaki guztiak (*1* zenbakia ez da beharrezkoa).

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

b.) 2 zenbakiaren multiploak

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~

b.) Geratu direnen artean, 3 zenbakiaren multiploak:

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~

c.) Geratu direnen artean, 5 zenbakiaren multiploak:

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~

d.) 7 > $\sqrt{31}$ izanik; hantxe amaitzen da eta zenbaki primoak ondoko hauek dira:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31.

Fermat-en teorema txikia.

Ditzagun bi zenbaki: 12 eta zenbaki lehen bat aurrekoaren zatitzaile ez dena, esaterako, 5.

Beti betetzen da 5 dela ondokoaren zatitzailea: $12^{(5-1)}-1=20735$ eta 5 zenbakia, 20735-ren zatitzailea da.

Orokortu esan daiteke: *a* zenbaki arrunta eta *p* zenbaki lehena, *a*-ren zatitzailea izan gabe, beti betetzen da p ondoko zenbaki honen zatitzailea dela: $a^{(p-1)}-1$

Bestalde, zenbaki baten zatitzaile positiboen batuketak zenbakia ematen duenean, ***zenbaki perfektua*** deitzen zaio (zatitzaileen artean ez da zenbakia bera sartu behar).

Esaterako, 6 = 1 + 2 +3 28 = 1+2+4+7+14

Euclides-ek aurkitu zuen lehenbiziko lau zenbaki perfektuak ondoko formula honen bidez kalkula daitezkeela: $2^{(n-1)}\cdot(2^n-1)$ eta hala: Hementxe duzu informazio gehigarria.

$$n=2^{(2-1)}\cdot(2^2-1)=2\cdot(4-1)=6$$

$$n=2^{(3-1)}\cdot(2^3-1)=4\cdot(8-1)=28$$

$$n=2^{(5-1)}\cdot(2^5-1)=16\cdot(32-1)=496$$

$$n=2^{(7-1)}\cdot(2^7-1)=64\cdot(128-1)=8128$$

Zuk zeuk:

Zein da eragiketa hau egiteko era zuzena?

Laguntza.

$23-3+4^2\cdot3-1$ $1+4\cdot3^{(2-1)}\cdot2^2-1$ $10+\dfrac{4}{\left(3+\dfrac{2}{(1+2^2)}\right)}$

Zenbaki osoak

Zenbaki osoak, zenbaki arrunten jeneralizazioa da zeinetan zenbaki negatiboak ere aurkitzen diren. Ondorioz, zenbaki osoen multzoan, ondoko hauek aurki daitezke: zeroa, zenbaki oso positiboak eta zenbaki oso negatiboak.

Zenbaki oso negatiboak interpreta daitezke zero zenbakiari zenbaki arrunt bat kentzearen ondorio gisa. Historikoki behialakoan, Indian erabiltzen hasi ziren baina Europan Pizkunde garaira arte ez ziren agertu. Zenbakion erabilpena kontabilitate jarduerekin dago lotuta. Hala pasiboko kontua (zorrak, alegia) handiago zenean, aktiboa baino, zenbaki gorriak erabiltzen ziren egoera hori adierazteko. Hala eta guztiz ere, zenbaki hauek XVII.mendera arte, mendebaleko diskurtso zientifikoetatik baztertuak izan ziren; izan ere, entitate ezinezkotzat jotzen ziren eta kontabilitatearen artifizio gisa ulertzen ziren.

Edonola ere, egun ulertu behar da zenbaki osoek (bai positiboek, bai -negatiboek) egitate edo unitate zatiezin direla (hortik dator *oso* goitizena) nahiz eta entitate hauek adierazi zer dagoen (positiboak) ala zenbat zor izaten den (negatiboak).

Zenbaki osoak grafikoki -∞tik +∞ra luzatzen den puntuz (zenbakiz) osaturiko hasiera eta amaierarik gabeko zuzen batean irudikatzen dira: ...-3 , -2, -1, 0, 1, 2, 3,... eta Z hizkiaz adierazten da zenbaki osoen multzoa (*Zahlen*, alemaneraz).

Zenbaki osoak, bakoitiak ala bikoitiak izan daitezke. Bikoitia izateko, zenbaki horrek 2ren multiploa izan behar du eta, hala deritzogu m zenbakia bikoitia dela betetzen bada beste zenbaki bat dagoela (dei diezaiogun, n) ondoko hau konplitzen duena: $m = 2 \cdot n$. Ondorioz, ondoko zenbakiok dira bikoitiak: 0, 2, 4, 6, ..., baita -2, -4, -6 ...ere.

Bakoitiak ez dira 2ren multiploak; hortaz, ondoko hauek dira: 1, 3, 5, 7, 9 ..., baita -1, -3, -5,...ere. Oro har m bakoitia da ondoko hau betetzen bada $m = 2 \cdot n + 1$ (non n beste zenbaki oso bat den).

Zenbaki bakoiti eta bikoitiak ondoko ezaugarri hauek dauzkate:

bikoitia + bikoitia = bikoitia............ $2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 2n$

bakoitia + bikoitia = bakoitia.......... $2a + 2b + 1 = 2 \cdot (a + b) + 1 = 2n + 1$

bakoitia + bakoitia = bikoitia......... $2a + 1 + 2b + 1 = 2a + 2b + 2 = 2 \cdot (a + b + 1) = 2n$

---

a, b-ren multiploa da, beste zenbakirik badago (n) ondoko hau betetzen duena: $a = b \cdot n$.

(adibidez, *27*, *3*-ren multiploa da, egon badagoelako $3 \cdot n = 27$; hain zuzen $n = 9$)

Zatigarritasunaren arauak.

Zenbaki arrazionalak

Zatikien bidez adieraz daitezkeen zenbakiak dira; hau da, zenbaki arrazionalak idurika daitezke bi zenbaki osoren arteko zatiketa gisa (zatitzailea *0* ez denean)

Esaterako, $2=\frac{4}{2}$ $\quad 1{,}5=\frac{3}{2}$ $\quad 2{,}5=\frac{15}{6}$ $\quad -3{,}5=\frac{7}{-2}$ $\quad 1{,}857142857=\frac{13}{7}$

Zenbaki hauek *Q* letraz errepresentatzen dira eta bere izena lotuta dago ez *arrazoinamenduarekin*, baizik eta *parte*, *atal*, *puska* ala *zati* ideiekin (gazteleraz, *ración*).

Zorrozki, esan beharra dago zenbaki arrazional bat multzo bat dela; hain zuzen ere,

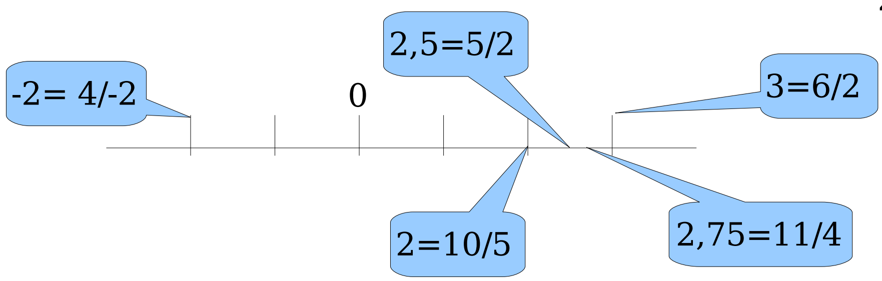
zatiki batek dituen zatiki baliokide guztiekin osatzen den multzoa.

$$\left\{2{,}25=\frac{9}{4}=\frac{18}{8}=\frac{36}{16}=\frac{72}{32}=\ldots\right\} \qquad \left\{4{,}5=\frac{9}{2}=\frac{18}{4}=\frac{36}{8}=\frac{72}{16}=\ldots\right\}$$

Baina, noski, praktikan, zenbaki arrazionalaren ordezko gisa zatiki edo frakzio laburtezin bakarra hartzen da; hau da:

$$2{,}25=\frac{9}{4} \qquad 4{,}5=\frac{9}{2}$$

Zenbaki arrunt eta osoetan ez bezala, zenbaki arrazionaletan zera betetzen da: bi zenbaki arrazional harturik, beti aurki daiteke haien arteko beste zenbaki arrazional bat (hau, noski, ez da zenbaki osorekin gertatzen; izan ere, ez dago -3 eta -4 arteko bestelako zenbaki osorik).



Gehiago hementxe.

Zenbaki arrazionalek duten errepresentazio hamartarra mota ezberdinekoa izan daiteke:

a) Zehatza: zati hamartarra zifra kopuru finitoa du. Adibidez: $\frac{57}{25}=2{,}28$

Kasu honetan, erraza da zifra hamartarretik lortzea:

$2{,}28=\frac{228}{100}$ eta jarraian frakzio laburtezina kalkulatzen da: $\frac{228}{100}=\frac{114}{50}=\frac{57}{25}$

b) Periodiko purua: zati hamartarra infinituki errepikatzen da. Adibidez: 5,1212121212...

$5{,}121212=5+0{,}121212=5+\frac{12}{99}$ errepikatzen den periodoaren zifra kopurua zenbatekoa, halako “9” zenbakia.

Gero batuketa egin eta laburtezina aurkitu: $5+\frac{12}{99}=\frac{5}{1}+\frac{12}{99}=\frac{((5\cdot 99)+12)}{99}=\frac{507}{99}=\frac{169}{33}$

c) Periodiko nahasia: Kasu honetan zati hamartar osoa infinitoki errepikatzen da baina beste zati bat ez.

$$2{,}27343434=2+0{,}27+0{,}00343434=2+\frac{27}{100}+\frac{(\frac{34}{99})}{100}=2+\frac{27}{100}+\frac{34}{9900}=¿$$

$$\frac{(2\cdot 100\cdot 9900+27\cdot 9900+34\cdot 100)}{990000}=\frac{2250700}{990000}=\frac{22507}{9900}$$

$\frac{22507}{9900}$ zatikia laburtezina da; izan ere, $22507=71\cdot 317$ eta beraz, bi zenbakiok ez dute zatitzaile komunik.

Zenbaki handien faktorizazioa egiteko, horra hor web erabilgarri hau.
Bestalde horra hor jarduera batzuk.

Beste adibide bat, kasu honetan ondoko zenbaki honekin: 0,5968456456456456

$$0{,}5968456456456456=0{,}5968+0{,}0000456456456=\frac{5968}{10000}+\frac{(\frac{456}{999})}{10000}$$

$$\frac{5968}{10000}+\frac{456}{9990000}=\frac{(5968\cdot 999+456)}{9990000}=\frac{5962488}{9990000}$$

$5962488=2^3\,x\,3\,x\,7\,x\,35491$ eta, bestalde, $9990000=2^4\,x\,3^3\,x\,5^4\,x\,37$, orduan:

$\frac{5962488}{9990000}=\frac{(2^3\,x\,3\,x\,7\,x\,35491)}{(2^4\,x\,3^3\,x\,5^4\,x\,37)}$ eta laburbilduz: $\frac{5962488}{9990000}=\frac{(7\,x\,35491)}{(2\,x\,3^2\,x\,5^4\,x\,37)}=\frac{248437}{416250}$

0,999999...=1

a.) Arestian erabilitako metodo bera aplikatuz, $\frac{9}{9}=1$

b.) $0{,}999\ldots=0{,}333\ldots+0{,}333\ldots+0{,}333\ldots=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

c.) 0.9999 eta 1, biak dira zenbaki arrazionalak eta ezberdinak balira, aurki liteke zenbaki bat (a) ondoko hau beteko lukeena: 1>a>0,999..., baina hori ezinezkoa da beraz 1 eta 0,999 zenbaki bera izango dira.
