Tema 6: Diagonalización.

1. Planteamiento del problema.

En lo que sigue, trabajamos en un K-espacio vectorial de dimensión finita, que denotaremos por V. Dada $\mathfrak{B}$ una base de V y $f : V \to V$ una aplicación lineal denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ a la matriz asociada a f cuando se toma en V la base $\mathfrak{B}$.

El primer problema que nos planteamos en este tema es el siguiente:

Dado una aplicación lineal $f : V \to V$, esto es un **endomorfismo** de V, deseamos saber bajo que condiciones podemos garantizar la existencia de una base $\mathfrak{B}_V$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal. Cuando esto suceda, diremos que el endomorfismo f es **diagonalizable**. Además, en tal caso, nos interesará dar un método constructivo que nos permita obtener una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Lo primero que debemos observar es que este problema presenta una dificultad: la base que se toma en V la utilizamos en origen y llegada para calcular la matriz asociada a f. Por ello, es de esperar que no todos los endomorfismos sean diagonalizables. De hecho, se verá que para que sean diagonalizables deberán cumplir dos condiciones.

El mismo problema se puede enunciar en términos de matrices. Dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ queremos saber bajo que condiciones existe una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$. Cuando esto sucede se dirá que A es una **matriz diagonalizable**.

Aunque al enunciar los dos problemas parezca que no hay ninguna relación entre ellos, lo cierto es que ambos están intimamente relacionados. En efecto, si nos dan una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a cierto endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n. Teniendo esto en cuenta, el ver si una matriz es diagonalizable es equivalente a estudiar si el endomorfismo asociado es diagonalizable.

Introducimos dos conceptos que nos aparecerán frecuentemente: el de **matrices se-**

mejantes y el de **matriz de paso**.

Definición. Dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz inversible, P, llamada matriz de paso, tal que $A = PBP^{-1}$.

Obviamente, las matrices asociadas a un mismo endomorfismo de un espacio vectorial V son semejantes ya que si $A = M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y $B = M_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, entonces $A = M_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}'_V} B M_{\mathfrak{B}'_V}^{\mathfrak{B}_V}$, donde $M_{\mathfrak{B}'_V}^{\mathfrak{B}_V}$ es la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}'_V$ a $\mathfrak{B}_V$.

Estas dos últimas definiciones permiten dar otra definición equivalente de matrices diagonalizables: una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Además, si f es un endomorfismo diagonalizable, observamos que todas las matrices asociadas a él son diagonalizables ya que son semejantes a una matriz diagonal.

Por último, para los endomorfismos diagonalizables nos plantearemos el siguiente problema: saber si una matriz es asociada a él o no en alguna base y en caso de serlo, localizar la base.

Asimismo, la versión matricial del problema anterior es saber si dos matrices diagonalizables son o no semejantes y, en caso de serlo, localizar una matriz de paso.

2. Subespacios f-invariantes.

En este segundo apartado realizamos una primera aproximación a la resolución del problema planteado mediante los subespacios f-invariantes.

Definición. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ de un K-espacio vectorial V, un subespacio W de V se dice que es **f-invariante** si $f(W) \subseteq W$.

Una característica importante de los subespacios f-invariantes es que si $W \subseteq V$ es un subespacio f-invariante de V y $f : V \to V$, entonces $f|_W : W \to W$ es un endomorfismo de W.

Ejemplo

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (-2y+4z, -x-y+z, 3x-3y+z)$ y el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$. Entonces, U es f-invariante ya que para todo $(x, y, z) \in U$, se cumple que $y = x + z$, luego

   $$f((x, x+z, z)) = (-2(x+z)+4z, -x-x-z+z, 3x-3x-3z+z) = (-2x+2z, -2x, -2z)$$

   y el vector $(-2x + 2z, -2x, -2z) \in U$.

   Necesitamos una nueva definición:

Definición. Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Se dice que A es una **matriz diagonal por bloques** si

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

donde $B_i \in Mat_{m_i\times m_i}(K)$, para $i = 1, \ldots, s$.

Cuando V se expresa como suma directa de subespacios f-invariantes, esto es $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, las matrices asociadas a f tienen una forma peculiar tal y como se indica en las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y W_1, W_2 dos subespacios de V. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$, *con* W_1, W_2 *subespacios f-invariantes.*

(ii) *Existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma:* $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$.

Para localizar la base que figura en el apartado (ii) de la Porposición anterior, es suficiente con tomar una base que esté formada por la unión de bases de W_1 y W_2.

Ejemplo.

1. Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (-2y+4z, -x-y+z, 3x-3y+z)$ y los subespacios $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, 0, x)|x \in x$. Entonces, W_1 y W_2 son f-invariantes y $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Por tanto, si tomamos la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ la matriz asociada a f escrita en notación por filas viene dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El resultado anterior se puede generalizar:

Proposición 2.2. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y $W_1, W_2, \ldots, W_t$ subespacios de V. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_t$, *con* W_i, $i = 1 \ldots t$, *subespacios f-invariantes.*

(ii) Existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma: $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t \end{pmatrix}$.

Por ello, lo que se intentará ver en los siguientes apartados es bajo que condiciones se puede garantizar la existencia de una descomposición de V como suma directa de subespacios f-invariantes tales que los bloques asociados a cada uno de ellos sean matrices diagonales.

3. Valores y vectores propios de un endomorfismo.

Los conceptos de valor y vector propio de un endomorfismo serán imprescindibles a la hora de resolver el problema de diagonalización que nos hemos planteado en este tema.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo. Un escalar $\lambda \in K$ se dice que es un **valor propio** de f si existe $v \in V - \{0_V\}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $\lambda \in K$ es un valor propio de f y $v \in V - \{0_V\}$ verifica que $f(v) = \lambda v$, se dice que V es un **vector propio** asociado a λ de f.

Ejemplo.

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x+y, y, y+z)$ y sea $\lambda = 1$. Entonces, para cada $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ se cumple que $f((x, 0, z)) = (x, 0, z)$, luego $\lambda = 1$ es un valor propio de f y $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ vector propio asociado al valor propio 1.

Es fácil demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y λ un valor propio del endomorfismo f. Entonces, el conjunto*

$$V(\lambda) = \{v \in v \mid f(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio f-invariante no nulo, llamado **subespacio fundamental** *asociado al valor propio λ. Además, si $\dim(V(\lambda)) = s$, entonces la matriz asociada a $f|_{\mathfrak{B}_{V(\lambda)}}$ es de la forma λI_s.*

La dimensión de este subespacio, conocida como **multiplicidad geométrica** de λ, será fundamental para poder determinar si un endomorfismo es diagonalizable o no.

Ejemplo.

1. Se considera, de nuevo, la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y, y, y + z)$ y sea $\lambda = 1$. Entonces,

$$V(1) = \{(x, y, z)|f((x, y, z)) = (x, y, z)\} = \{(x, 0, z)|x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Consecuentemente, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 es 2.

Por último, un resultado que emplearemos posteriormente es:

Proposición 3.2. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y $\lambda_1 \dots \lambda_r$ r valores propios distintos dos a dos de f. Si $v_i \in V(\lambda_i)$ un vector propio asociado al valor propio λ_i, para $i = 1, \dots, r$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto libre.*

4. Valores y vectores propios de una matriz. Polinomio característico.

Del mismo modo que en el apartado anterior se han definido los conceptos de valor y vector propio de un endomorfismo, en este apartado se dan los conceptos análogos para una matriz cuadrada. Tanto para definir el concepto de valor propio de una matriz como el de vector propio, se emplea el uso de la notación por filas en las coordenadas de un vector.

Definición. Dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ y un escalar $\lambda \in K$ se dice que λ es un **valor propio** de A si existe $(a_1 \dots a_n) \in Mat_{1\times n}(K) - \{(0 \dots 0)\}$ tal que $(a_1 \dots a_n)A = \lambda(a_1 \dots a_n)$. A $(a_1 \dots a_n)$ se le denominará **vector propio** asociado al valor propio λ.

Si tenemos en cuenta que dada una matriz cuadrada $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n fijada una base $\mathfrak{B}_V$, entonces los vectores propios de A nos dan precisamente las coordenadas de los vectores propios de f en la base $\mathfrak{B}_V$, empleando la notación por filas. En caso de usar la notación por columnas, será necesario definir los vectores propios como vectores columna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ tales que $A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ para que se siga manteniendo la interpretación anterior.

Realizando un estudio paralelo al llevado a cabo en el apartado anterior, podemos construir un subespacio $V_A(\lambda)$ que estará formado por todos los vectores propios asociados al valor propio λ y el vector $(0 \dots 0)$, esto es

$$V_A(\lambda) = \{(a_1 \dots a_n) \in Mat_{1\times n}(K)|(a_1 \dots a_n)A = \lambda(a_1 \dots a_n)\}.$$

Este subespacio desempeñará el mismo papel que $V(\lambda)$ a la hora de analizar si una matriz es diagonalizable o no.

Para poder obtener de forma sencilla los valores propios de una matriz tenemos el concepto de **polinomio característico de una matriz** $A \in Mat_{n\times n}(K)$, que es $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$, y el de **ecuación característica**: $\chi_A(x) = 0$.

Se observa que el polinomio característico de una matriz de orden $n \times n$ es de grado n.

En la siguiente Proposición relacionamos los conceptos de polinomio característico de una matriz y de valor propio:

Proposición 4.1. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, las raíces de $\chi_A(x)$ que están en K son los valores propios de A.*

Ejemplo.

1. El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ viene dado por

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3.$$

Por tanto, el único valor propio de A es 1.

Para poder calcular de forma sencilla los valores propios de un endomorfismo $f : V \to V$ necesitamos conocer si existe alguna relación entre los polinomios característicos de dos matrices semejantes. Ahora, se verifica:

Proposición 4.2. *Sean $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ dos matrices semejantes. Entonces, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.*

De las dos últimas proposiciones se deduce:

Corolario 4.3. *Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Por otro lado, como las matrices asociadas a un mismo endomorfismo son semejantes y las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, se puede definir el concepto de **polinomio caraterístico de un endomorfismo**: será el polinomio característico de cualquier matriz asociada a él y se denotará por $\chi_f(x)$. Además, los valores propios del endomorfismo f son precisamente las raíces de su polinomio carateríristico.

Por último, para finalizar este apartado introducimos el concepto de **multiplicidad algebraica** de un valor propio: es la multiplicidad que presenta como raíz del polinomio característico. Se denotará por $m(\lambda)$.

Existe una relación entre la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica:

Lema 4.4. *Sea λ un valor propio de un endomorfismo $f : V \to V$. Entonces,*

$$dim(V(\lambda)) \leq m(\lambda).$$

Del mismo modo se tiene:

Lema 4.5. *Sea λ un valor propio de $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces,*

$$dim(V_A(\lambda)) \leq m(\lambda).$$

5. Endomorfismos y matrices diagonalizables.

Después de lo visto en los apartados precedentes, disponemos de las herramientas necesarias para caracterizar los endomorfismos y matrices diagonalizables.

Teorema 5.1. (Caracterización de endomorfismos diagonalizables). *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

(i) Su polinomio característico se escinde sobre K, esto es, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $dim(V(\lambda)) = m(\lambda)$.

De la demostración del teorema anterior, se deduce que si f es un endomorfismo diagonalizable, una base respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal será aquella que esté formada por vectores propios, tomandose para cada valor propio tantos vectores propios linealmente independientes como nos indique su multiplicidad. Eligiendo esta base, se ve que la matriz asociada a f es diagonal, presentando en su diagonal los valores propios de f repetidos tantas veces como nos indique su multiplicidad. A esta matriz se le denominará **forma diagonal** de f y es única, salvo el orden de los elementos de la diagonal.

Ejemplo.

1. Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x+y, y, y+z)$, es fácil ver que la matriz asociada a f respecto de la base canónica de R^3 escrita en notación por filas es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su polinomio característico viene dado por

$$\chi_f(A) = \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3.$$

Por tanto, sólo hay un valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 3. PeroEntonces,

$$V(1) = \{(x, y, z) | f((x, y, z)) = (x, y, z)\} = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Consecuentemente, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 es 2. Esto implica que f no es diagonalizable.

Por otro lado, si $f : V \to V$ es un endomorfismo tal que tiene $n = dim(V)$ vectores propios linealmente independientes, entonces f es diagonalizable. Así que tenemos otra caracterización equivalente de endomorfismo diagonalizable:

Corolario 5.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si existe $\mathfrak{B}_V$ base de V formada por vectores propios de f.*

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 5.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo que tiene n valores propios distintos dos a dos. Entonces, f es diagonalizable.*

Del mismo modo podemos dar una caracterización para las matrices diagonalizables:

Teorema 5.4. (Caracterización de matrices diagonalizables). *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

(i) Su polinomio característico se escinde sobre K, esto es, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $dim(V_A(\lambda)) = m(\lambda)$.

Cuando $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es diagonalizable, empleando los vectores propios asociados a cada valor propio, se puede construir una matriz de paso P y se puede calcular la llamada **forma diagonal** de A, que es una matriz diagonal semejante a la matriz diagonalizable A. Esta matriz diagonal tendrá en su diagonal los valores propios de A repetidos tantas veces como nos indique su multiplicidad y es única salvo el orden de los elementos de la diagonal.

También podemos enunciar dos corolarios:

Corolario 5.5. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo A tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 5.6. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$ que tiene n valores propios distintos dos a dos. Entonces, A es diagonalizable.*

Por último, damos respuesta al problema de saber si una matriz es matrz asociada a un endomorfismo diagonalizable en alguna base. Para que esto suceda, se demuestra que una condición necesaria es que el polinomio característico de la matriz y del endomorfismo deben coincidir. Una condición necesaria y suficiente es que ambos tengan la misma forma diagonal. Trasladandolo a matrices, dada una matriz diagonalizable cuaquier otra matriz será semejante a ella si posee su misma forma diagonal.