Tema 5: Determinantes.

1. El grupo simétrico.

Definición. Una **permutación** del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ es una aplicación biyectiva de $\{1, \ldots, n\}$ en si mismo.

Se define el conjunto

$$\Sigma_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ es una permutación } \}$$

En este conjunto definimos el **producto** de dos permutaciones $f, g \in \Sigma_n$ mediante $fg = g \circ f$, donde $\circ$ es composición usual de aplicaciones.

Es fácil ver que

Proposición 1.1. $(\Sigma_n, \cdot)$ *es un grupo, llamado* **grupo simétrico de grado** n.

Una notación sencilla para denotar las permutaciones $f \in \Sigma_n$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

En la primera fila se colocan los elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ y debajo de cada elemento su imagen.

Ejemplo.

1. La permutación $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definida por

$$\begin{array}{cccc} f(1) = 3 & f(2) = 7 & f(3) = 2 & f(4) = 5 \\ f(5) = 6 & f(6) = 4 & f(7) = 1 & f(8) = 8 \end{array}$$

se escribirá

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Definición. Una **trasposición** de $(\Sigma_n, \cdot)$ es una permutación $f \in \Sigma_n$ que verifica que existen dos elementos distintos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tales que

$$f(i) = j, \quad f(j) = i \quad f(k) = k, \forall k \in \{1, \ldots, n\} - \{i, j\} \tag{1}$$

Las trasposiciones se suelen denotar por $(i \quad j)$, donde $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ verifican (1).

Ejemplo.

1. La trasposición $(2\ 7) \in \Sigma_8$ es la aplicación biyectiva tal que $f(i) = i$, para $i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $f(2) = 7$ y $f(7) = 2$.

Definición. Un **ciclo de longitud** r de Σ_n es una permutación f de Σ_n para la que existen $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, donde $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$, tales que

$$\begin{aligned} &f(i_j) = i_{j+1}, \text{ para } j = 1, \ldots, r-1, \\ &f(i_r) = i_1 \\ &f(k) = k, \text{ si } k \in \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_r\} \end{aligned}$$

Los r-ciclos se suelen denotar por $(i_1 \ldots i_r)$.

Dos ciclos de Σ_n, $(i_1 \ldots i_r)$ y $(j_1 \ldots j_s)$ se dice que son **disjuntos** si $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\}$ es el conjunto vacío.

Ejemplo.

1. El ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$ es la aplicación biyectiva tal que $f(i) = i$, para $i \in \{4, 5, 6, 8\}$, $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 7$ y $f(7) = 1$.

2. Los ciclos $(1\ 3\ 2\ 7), (6\ 4\ 5) \in \Sigma_8$ son disjuntos.

Los ciclos nos permiten expresar cualquier permutación como producto de ciclos disjuntos. En efecto,

Proposición 1.2. *Sea $f \in \Sigma_n$ una permutación. Entonces, f se expresa de forma única como producto de ciclos disjuntos, salvo el orden de los factores.*

Ejemplo.

1. Consideramos la aplicación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

   Para buscar su descomposición en ciclos disjuntos procedemos de la siguiente manera:

   (a) Buscamos el primer elemento tal que $f(i) \neq i$. En esta caso, $i = 1$.

   (b) Realizamos las imágenes sucesivas de i, esto es, $f(i)$, $f(f(i))$, $f(f(f(i)))$, $\cdots$ hasta que $f^k(i) = i$. En este caso $f(1) = 3$, $f(f(1)) = 2$, $f(f(f(1))) = 7$ $f(f(f(f(1)))) = 1$

   (c) Se construye el ciclo $(f(i)\ f(f(i))\ \cdots f^k(i))$. En este caso, (3 2 7 1).

   (d) Se repiten los pasos (a), (b) y (c) con el resto de los valores de $\{1, 2, \cdots, n\}$ que no figuren el los ciclos construidos en pasos anteriores y hasta que los valores que nos queden verifiquen $f(k) = k$. En este caso, tomamos $i = 4$ y construimos el ciclo (5 6 4).

   (e) Entonces, la permutación f será el producto de los ciclos construidos. En nuestro ejemplo, (3 2 7 1)(5 6 4). Como se observa, por la forma de construcción, los ciclos que aparecen en el producto son disjuntos.

Proposición 1.3. *Sea $(i_1 \ldots i_r) \in \Sigma_n$ un ciclo de longitud r. Entonces, $(i_1 \ldots i_r)$ se descompone como producto de trasposiciones.*

Para demostrar la Proposición anterior es suficiente con encontrar una descomposición del ciclo en trasposiciones. Así, si tomamos $(i_1 \ldots i_r) \in \Sigma_n$ basta tomar el producto de trasposiciones $(i_1\ i_r)(i_r\ i_{r-1})(i_{r-1}\ i_{r-2}) \cdots (i_3\ i_2)$.

Ejemplo.

1. Tomamos el ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$. Entonces, un producto de trasposiciones que nos da el ciclo es: (1 7)(7 2)(2 3).

Utilizando que cada permutación se escribe como producto de ciclos disjuntos y que cada ciclo es producto de trasposiciones, es fácil demostrar:

Corolario 1.4. *Cada permutación de Σ_n se expresa como producto de trasposiciones.*

Proposición 1.5. *Sea f una permutación de Σ_n. Si se descompone como un número* *par (impar) de trasposiciones, entonces cualquier descomposición de f en producto de trasposiciones tendrá un número par (impar) de trasposiones.*

Definición. Sea f una permutación de Σ_n. Se llama **signatura** de f, y se denota por e_f, a

$$e_f = \begin{cases} 1, & \text{si } f \text{ se descompone como un producto de un número par de trasposiciones;} \\ -1, & \text{si } f \text{ se descompone en un producto de un número impar de trasposiciones.} \end{cases}$$

Ejemplo.

1. Tomamos el ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$. Sabemos que un producto de trasposiciones que nos da el ciclo es: $(1\ 7)(7\ 2)(2\ 3)$. Entonces, la signatura del ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$ es -1 ya que cualquier producto de trasposiciones que dé $(1\ 3\ 2\ 7)$ tiene un número impar de trasposiciones.

   Se observa que la signatura de la permutación f y la de f^{-1} son iguales.

2. Determinante de una matriz.

Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Se llama **determinante** de A, y se denota por $\det(A)$, al escalar

$$\det(A) = |A| = \sum_{\alpha\in\Sigma_n} e_\alpha a_{\alpha(1)1} \dots a_{\alpha(n)n}.$$

Ejemplos

1. Si $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$, entonces $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. Si $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$, entonces $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{23}a_{31} + -a_{13}a_{32}a_{21}$.

3. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ es una matriz triangular, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

   Los determinantes tienen las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y A^t es su matriz traspuesta, entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

2. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ tiene dos columnas (filas) iguales, entonces $\det(A) = 0$.

3. Si en la matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se multiplica una columna (una fila) por el escalar λ, entonces el determinante de la matriz resultante es $\lambda\det(A)$.

4. El determinante de la matriz A no cambia si se sustituye la columnna (fila) i por ella misma más una combinación lineal de las restantes columnas (filas).

5. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y a la columna $A^{(i)}$ (fila $A_{(i)}$) le añadimos $B \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ ($B \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$), entonces el determinante de la matriz C resultante verifica $\det(C) = \det(A) + \det(D)$, donde $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ es la matriz que tiene por columnas (filas) las mismas que la matriz A salvo la i-ésima que es B.

6. Si en la matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se intercambian de posición dos columnas (ó filas), el determinante de la matriz resultante B verifica $\det(B) = -\det(A)$.

7. Si $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, entonces $|AB| = |A||B|$.

Las propiedades anteriores nos sirven para calcular determinantes de matrices. Por ello, realizaremos operaciones en las matrices para conseguir determinantes de matrices que estén relacionados con el determinante de la matriz original y sean más sencillos de calcular. Una estrategia buena puede ser ir haciendo '0' en la matriz para conseguir una matriz triangular, cuyo determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Por otro lado, los determinantes nos sirven para caracterizar las matrices inversibles:

Proposición 2.1. *Una matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ es inversible si y sólo si $|A| \neq 0$. Además, si A es inversible, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.*

3. Cálculo de determinantes mediante desarrollos.

Definición. Dada una matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, se llama **adjunto del elemento** ij, donde $1 \leq i, j \leq n$ a $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo Δ_{ij} el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j en A. A la matriz $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ tal que

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

se le llama **matriz adjunta de** A.

Proposición 3.1. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Entonces,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

A la expresión que aparece en la Proposición anterior se le conoce como **desarrollo del determinante de A por la fila i-ésima**.

Proposición 3.2. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Entonces,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

A la expresión que aparece en la Proposición anterior se le llama **desarrollo del determinante de A por la columna j-ésima**.

La importancia de poder calcular determinantes de matrices cuadradas mediante desarrollos por filas o columnas estriba en que da un método para calcular determinantes basado en el cálculo de determinantes de matrices de orden inferior. Así, si se desea calcular el determinante de una matriz $4x4$, bastará con calcular 4 determinantes de matrices de orden $3x3$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

4. Aplicaciones de los determinantes.

Los determinantes presentan varias aplicaciones. Entre ellas, destacan las siguientes:

Proposición 4.1.(Cálculo de rangos) *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Entonces, el rango de A es r si y sólo si existe una submatriz de A de orden $r \times r$ con determinante no nulo y todas las submatrices de A de orden $(r+1)\times(r+1)$ tienen determinante 0.*

También sirven los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados, mediante la llamada **Regla de Cramer**:

Proposición 4.2.(Regla de Cramer) *Sea $AX = B$, donde $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $X, B \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado. Entonces, la* *única solución del mismo viene dado por* $x_j = \frac{|C_j|}{|A|}$*, donde* $|C_j|$ *es la matriz que se obtiene a partir de* A *sustituyendo la columna* j*-ésima de* A *por* B*, para* $j = 1, \ldots, n$*.*

Observar que al ser el sistema compatible determinado tenemos que $\mathrm{rg}(A) = n$ y $\det(A) \neq 0$.

Proposición 4.3. *Sea* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ *una matriz inversible. Entonces,* $A^{-1} = \mathrm{adj}(A)^t |A|^{-1}$*, donde* $\mathrm{adj}(A)$ *es la matriz adjunta de* A*.*