Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Rango de una matriz.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **rango de filas** de A, y se denota por $\mathrm{rg}_f(A)$ la dimensión del subespacio vectorial generado por las filas de la matriz A, esto es,

$$\mathrm{rg}_f(A) = \dim_k < A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} >,$$

donde $A_{(j)}$ es la j-ésima fila de A.

De la propia definición se observa que el rango de filas de $A \in Mat_{n\times m}(K)$ es menor o igual que n el número de filas de A.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **rango de columnas** de A, y se denota por $\mathrm{rg}_c(A)$, a la dimensión del subespacio vectorial generado por las columnas de la matriz A, esto es,

$$\mathrm{rg}_c(A) = \dim_k < A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} >,$$

siendo $A^{(j)}$ es la j-ésima columna de A.

Observamos que

$$\mathrm{rg}_c(A) \leq m,$$

donde m es el número de columnas de A.

Nuestro objetivo es probar que para cualquier matriz $A \in Mat_{n\times m}(K)$ se verifica que

$$\mathrm{rg}_f(A) = \mathrm{rg}_c(A).$$

Utilizaremos las aplicaciones lineales para demostrarlo.

Teorema 1.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, $f : V \to W$ una aplicación lineal $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$ bases de V y W y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ la matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$. Entonces,* $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rg}_f(M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f))$.

Corolario 1.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces, todas las matrices asociadas a f tienen el mismo rango de filas.*

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **matriz traspuesta** de A, y se denota por A^t, a la matriz de orden $m \times n$ cuyas filas son las columnas de A.

Es obvio que el rango de filas de A^t coincide con el rango de columnas de A. Con ello demostraremos:

Teorema 1.3. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Entonces, $rg_f(A) = rg_c(A)$.*

La importancia de que $rg_f(A) = rg_c(A)$ radica en que podemos definir el concepto de **rango** de una matriz como el número de filas o de columnas linealmente independientes. Lo denotaremos por $rg(A)$.

Observamos que todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal tienen el mismo rango y éste coincide con el rango de la aplicación lineal, esto es, con la dimensión del espacio vectorial $f(V)$.

En el caso de matrices cuadradas, el rango nos permite caracterizar a las matrices inversibles, tal y como aparece en el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, A es inversible si y sólo si $rg(A) = n$.*

Para ello, si A es una matriz inversible construimos una aplicación lineal cuya matriz asociada sea A y se comprueba que A es equivalente a I_n y, por tanto, $rg(A) = n$. Recíprocamente, si $rg(A) = n$ la aplicación lineal construida cuya matriz asociada es A verifica que I_n es otra matriz asociada luego $A = PI_nQ$, con P y Q inversibles, luego A es inversible.

2. Transformaciones elementales. Cálculo del rango.

En esta apartado se da un método para calcular el rango de una matriz empleando transformaciones elementales.

Definición. Una **transformación elemental** consiste en realizar una de las siguientes acciones en la matriz A:

1. Intercambiar dos filas (ó dos columnas) de posición.

2. Cambiar una fila (ó columna) por λ ella misma, siendo $\lambda \in K - \{0\}$.

3. Sustituir una fila (ó columna) por ella misma más una combinación lineal del resto de las filas (ó columnas).

Al aplicar cualquiera de las transformaciones elementales anteriores el rango de una matriz A no varía. Por tanto, podemos emplear estas transformaciones aplicadas a una matriz A para calcular su rango, pasando de la matriz dada A a otra más sencilla que tenga su mismo rango por haber realizado sólo tranformaciones elementales. Se entenderá por matriz más sencilla aquella que presente entradas 0 fuera de la diagonal principal o al menos por debajo ó por encima de la misma.

Las **matrices elementales** que realizan en A las transformaciones elementales son:

$$P_{ij} = (p_{kl}) \in Mat_{s\times s}(K), \qquad p_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l,\, k \neq i, j \\ 0 & k = l = i \\ 0 & k = l = j \\ 0 & k \neq l,\, (k,l) \notin \{(i,j),(j,i)\} \\ 1 & (k,l) \in \{(i,j),(j,i)\} \end{cases}$$

$$T_{ij}(\lambda) = (t_{kl}) \in Mat_{s\times s}(K), \qquad t_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \text{ y } (k,l) \neq (i,j) \\ \lambda & (k,l) = (i,j) \end{cases}$$

$$Q_i(\lambda) = T_{ii}(\lambda) \in Mat_{s\times s}(K).$$

En el caso de $T_{ij}(\lambda)$ y de $Q_i(\lambda)$ se toma $\lambda \in K - \{0\}$ para que la matriz resultante sea inversible. Tomando el parámetro s el valor adecuado para poder realizar el producto de matrices, es claro que

1. $P_{ij}A$ intercambia en A las filas i y j.

2. AP_{ij} intercambia en A las columnas i y j.

3. $T_{ij}(\lambda)A$ sustituye la fila i-ésima de A por $A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$.

4. $AT_{ji}(\lambda)$ sustituye la columna i-ésima de A por $A^{(i)} + \lambda A^{(j)}$.

5. $Q_i(\lambda)A$ sustituye la fila i-ésima de A por $\lambda A_{(i)}$.

6. $AQ_i(\lambda)$ sustituye la columna i-ésima de A por $\lambda A^{(i)}$.

Se observa que al realizar transformaciones elementales en realidad estamos multiplicando la matriz A por matrices inversibles, luego la matriz A y la obtenida tras la multiplicación son matrices equivalentes. Este hecho es el que garantiza que el rango de A y de la matriz resultante coincide.

Ejemplo.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Sabemos que $rg(A) \leq 3$. Lo calculamos empleando transformaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_{32}(-1)T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)AT_{42}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_3(-1)T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)AT_{42}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa hemos ido anotando las transformaciones elementales que hemos ido realizando para poder obtener de forma rápida las matrices $P \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tales que $PAQ = B$. Tomamos $P = Q_3(-1)T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)$ y $Q = T_{42}(-1)$. Observamos que P lleva las transformaciones por filas que hemos realizado y Q lleva las transformaciones elementales por columnas realizadas.

3. Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición. Una ecuación lineal en las indeterminadas o variables x_1, …, x_m es una expresión del tipo

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i,$$

donde $a_{ij}, b_i \in K$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Definición. Un **sistema de ecuaciones lineales** en las variables x_1, …, x_m es un conjunto de ecuaciones lineales en estas variables.

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar matricialmente. Así, si tenemos el sistema de n ecuaciones lineales en las incógnitas x_1, ..., x_m dado por:

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_1 n \end{array}\right\}$$

podemos escribirlo matricialmente de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ se le llama **matriz del sistema**, a $B = (b_i) \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ se le denomina **matriz de los términos independientes** y a matriz $(A|B)$ se le llama **matriz ampliada**. A la expresión $AX = B$ se le conoce como **expresión matricial** del sistema de ecuaciones lineales.

Definición. Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0_K.

4. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones lineales en las variables x_1, ..., x_m. Se dice que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$ es una solución del sistema si se verifica $A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = B$.

Resolver una sistema de ecuaciones lineales consiste en localizar todas las soluciones del mismo, si es que existen. Cuando un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución se dice que es **incompatible**.

Si tiene al menos una solución se dice que el sistema es **compatible**. Si en un sistema compatible hay una única solución diremos que el sistema es **determinado** y si hay más de una solución es **indeterminado**.

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son todos compatibles ya que admiten al menos una solución: $\begin{pmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$. A esta solución se le conoce como **solución trivial**. Con el siguiente teorema podemos saber de forma rápida si un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es compatible o no:

Teorema 4.1.(Teorema de Rouché-Frobenius) *Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Entonces, es compatible si y sólo si el rango de la matriz del sistema* *y el rango de la matriz ampliada coinciden, esto es,*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B).$$

Proposición 4.2. *Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo* $AX = 0$*. Entonces, las soluciones del sistema homogéneo forman el núcleo de la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) & \longrightarrow & K^n \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m, \ldots, a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m). \end{array}$$

Proposición 4.3. *Sea* $AX = B$ *un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo compatible y* $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ *es una solución del mismo. Entonces, todas las soluciones del sistema vienen dadas por* $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} + \mathrm{Ker}(\psi)$*, donde* ψ *es la aplicación lineal definida en la proposición anterior.*

Una vez resuelto el saber cuando existe solución y cómo son las soluciones una vez que se conoce una, queda pendiente localizar, precisamente, esta solución particular para luego poder construir todas las soluciones una vez calculado el núcleo de ψ.

Para los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, una forma de localizar la solución particular es realizando tranasformaciones elementales en las **filas** de la matriz ampliada, hasta conseguir otro sistema que tenga por matriz una triangular. De este modo, el nuevo sistema resultante tendrá la misma solución que el sistema de partida pero es más sencillo de resolver.

5. Aplicación de las transformaciones elementales al cálculo de la matriz inversa.

Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible podemos interpretar la búsqueda de su inversa de la forma siguiente: si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$, sabemos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

luego buscar A^{-1} es localizar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales

$$AX^{(i)} = E_i,\ \forall i = 1, \ldots, n,$$

siendo $X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ y $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, estando el 1 en la fila i-ésima. Entonces, si partimos de la matriz $(A|I_n)$ y realizamos transformaciones elementales sólo por **filas** hasta llegar a $(I_n|B)$, es evidente que $A^{-1} = B$.