Tema 3: Aplicaciones Lineales.

1. Definición de aplicación lineal y propiedades.

Definición. Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación lineal** si se verifica la siguiente condición:

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v'), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall v, v' \in V.$$

Las aplicaciones lineales también suelen recibir el nombre de **homomorfismos** entre espacios vectoriales. Un **monomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ inyectiva. Un **epimorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ sobreyectiva. Un **isomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ biyectiva. Si $V = W$ y $f : V \to V$ es una aplicación lineal, se dice que f es un **endomorfismo** del espacio vectorial V y si además es biyectiva, se dice que es un **automorfismo** de V.

Ejemplos.

(1) La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y, y + 2z)$ es lineal.

(2) La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y + 1, y + 2z)$ no es lineal.

Las aplicaciones lineales f tienen diversas propiedades. Entre ellas destacan las siguientes:

Proposición 1.1. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces,*

(i) $f(0_V) = 0_W$.

(ii) $f(-v) = -f(v)$, $\forall v \in V$.

(iii) $f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_i \in K$, $\forall v_i \in V$.

(iv) *Si* $\{v_1, \dots v_m\}$ *es un subconjunto ligado de* V*, entonces* $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$ *es un subconjunto ligado de* W*.*

(v) *Si* U *es un subespacio de* V*, entonces* $f(U) = \{f(u) | u \in U\}$ *es un subespacio de* W*. Además, si* $\dim(U) = m$*, entonces* $\dim(f(U)) \leq m$*.*

(vi) *Si* T *es un subespacio de* W*, entonces* $f^{-1}(T) = \{v \in V | f(v) \in T\}$ *es un subespacio de* V*.*

Observamos que en el enunciado del teorema anterior no indicamos que sucede cuando se toman imágenes de subconjuntos libres. En general, esta característica no se mantiene. Esto es si S es un subconjunto libre de V y $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces **no** podemos garantizar que $f(S)$ sea un subconjunto libre de W. Como veremos más adelante, será necesario pedir que f sea además inyectiva para poder asegurar que subconjuntos libres de V tienen por imagen subconjuntos libres de W.

En el apartado (v) de la Proposición 1.1, hemos visto que $f(U)$ es un subespacio de W para cualquier subespacio U de V. En particular si tomamos $U = V$, obtenemos que $f(V)$ es un subespacio de W llamado **K-subespacio imagen de** V. Además, hemos visto que $\dim(f(V)) \leq \dim(V)$. A $\dim(f(V))$ se le llama **rango** de f. $f(V)$ también se suele denotar por $\mathrm{Im} f$.

De forma análoga, en el apartado (vi) de la Proposición 1.1, hemos demostrado que si T es un subespacio de W, entonces $f^{-1}(T) = \{v \in V | f(v) \in T\}$ es un subespacio de V. Si elegimos $T = \{0_W\}$, tenemos que

$$f^{-1}(0_W) = \{v \in V | f(v) = 0_W\}$$

es un subespacio de V, llamado **núcleo** de la aplicación lineal f y se suele denotar por $\ker f$.

Ejemplo.

(1) El núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x,y,z)) = (x+y, y+2z)$ es $\ker f = \{(x, -x, \frac{x}{2}) | x \in \mathbb{R}\}$.

2. El espacio vectorial $\mathfrak{L}_K(V,W)$.

Se considera el conjunto $\mathfrak{L}_K(V,W)$ dado por

$$\mathfrak{L}_K(V,W) = \{f : V \to W \mid f \text{ es lineal}\},$$

donde V y W son dos K-espacios vectoriales. En este conjunto definimos las siguientes operaciones:

$$\forall f, g \in \mathfrak{L}_K(V, W), \forall v \in V \quad (f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

y

$$\forall f \in \mathfrak{L}_K(V, W), \forall v \in V, \forall \alpha \in K \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v)$$

Es fácil ver que $f + g$ es otra aplicación lineal de V en W, luego $+$ nos define una ley de composición interna sobre $\mathfrak{L}_K(V, W)$. Además, $(\mathfrak{L}_K(V, W), +)$ es un grupo abeliano, esto es que la suma de aplicaciones lineales de V en W es conmutativa, asociativa, existe un elemento neutro (que es la aplicación nula $f(v) = 0_W$, para todo $v \in V$) y existe elemento inverso (dada $f \in \mathfrak{L}_K(V, W)$, su elemento inverso es $-f$ definida por $\forall v \in V (-f)(v) = -f(v)$ y $-f \in \mathfrak{L}_K(V, W)$). Por otro lado, αf es otra aplicación lineal de v en W, si $f \in \mathfrak{L}_K(V, W)$ y $\alpha \in K$. Con la suma definida en $\mathfrak{L}_K(V, W)$ y la multiplicación por un escalar señalada, se demuestra que $(\mathfrak{L}_K(V, W), +, .)$ tiene estructura de K-espacio vectorial.

3. El núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, hemos probado que el núcleo y la imagen son subespacios vectoriales en la Proposición 1.1. Estos subespacios son muy útiles a la hora de estudiar las aplicaciones lineales. Por ejemplo, es fácil probar la relación existente entre las dimensiones del núcleo, de la imagen y la del espacio vectorial V:

Proposición 3.1. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales, V de dimensión finita, y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces,*

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f).$$

Además, las aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas se pueden caracterizar mediante utilizando el espacio vectorial imagen y el $\ker f$. En concreto, de la definición de aplicación lineal, se deduce que si f es una aplicación lineal entre V y W y $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im} f$. Es evidente que una aplicación lineal $f : V \to W$ es sobreyectiva si y sólo si el subespacio imagen $\mathrm{Im} f$ tiene la misma dimensión que W.

Respecto de la inyectividad, tenemos:

Proposición 3.2. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces f es inyectiva si y sólo si su núcleo,* $\ker f$*, es el subespacio vectorial $\{0_V\}$.*

Como consecuencia de proposiciones 3.1 y 3.2 es inmediato demostrar:

Corolario 3.3. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita y $f : V \to W$. Entonces, f es inyectiva si y sólo si* $\dim_K V = \dim_K f(V)$.

Una última utilidad viene expresada en el siguiente resultado:

Proposición 3.4. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita $f : V \to W$ una aplicación lineal inyectiva. Si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ es un subconjunto libre, entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\} \subseteq W$ es libre.*

4. Isomorfismos entre espacios vectoriales.

En esta apartado estudiamos un tipo de aplicaciones lineales interesantes: los isomorfismos entre espacios vectoriales. Cuando existe un isomorfismo entre V y W, diremos que V y W son espacios **isomorfos**.

En el siguiente teorema caracterizamos los espacios vectoriales isomorfos:

Teorema 4.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces, V y W son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Ejemplo.

1. Los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ son isomorfos porque ambos tienen dimensión 4. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $f((a, b, c, d)) = a+bx+cx^2+dx^3$ es un isomorfismo entre ambos espacios vectoriales.

5. Matriz asociada a una aplicación lineal (notación por filas).

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W, entonces dado un vector $v \in V$, podemos expresar $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j,$$

siendo $f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$. Por tanto, si empleamos la notación por filas para expresar las coordenadas de los vectores, podemos dar la siguiente **expresión matricial** de $f(v)$:

$$f(v) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

y a la matriz $A = (a_{ij})$ se le denomina **matriz asociada a f respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$**. Esto es,

$$f(v) = (\text{coord. de } v \text{ en } \mathfrak{B}_V) \begin{pmatrix} \text{coord. de } f(v_1) \text{ en } \mathfrak{B}_W \\ \text{coord. de } f(v_2) \text{ en } \mathfrak{B}_W \\ \vdots \\ \text{coord. de } f(v_n) \text{ en } \mathfrak{B}_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo.

(1) Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1, a_1 + 2a_2)$ la matriz asociada a f tomando como bases $\mathfrak{B}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(0,1)\}$ viene dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Es obvio que si conocemos la matriz asociada a una aplicación lineal con respecto a dos bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$, podemos obtener $f(v)$ para cualquier vector v de V, esto es, dada la matriz asociada A, la aplicación lineal f se encuentra totalmente determinada. Además, existe una relación entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal cuando se toman bases diferentes en V y W. En efecto, si A es la matriz asociada a f con respecto a las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ y B es la matriz asociada a f con respecto de las bases $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}'_W$, entonces

$$B = M_{\mathfrak{B}'_V, \mathfrak{B}_V} A M_{\mathfrak{B}_W, \mathfrak{B}'_W}.$$

Por otro lado, la matriz asociada a una aplicación lineal nos permite dar una interpretación en términos de aplicaciones lineales de las matrices de cambio de base. Una matriz de cambio de base se puede ver como la matriz asociada a la aplicación lineal a la identidad de un espacio vectorial cuando se toma en origen una base $\mathfrak{B}_V$ y en llegada $\mathfrak{B}'_V$.

El siguiente lema prueba la relación existente entre matrices asociadas cuando sumamos o multiplicamos por un escalar aplicaciones lineales:

Lema 5.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$ y $g : V \to W$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$ bases de V y W y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(g)$ las matrices asociadas a f y g respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$. Entonces,*

(i) $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f+g) = M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f) + M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(g)$.

(ii) $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(\lambda f) = \lambda M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$.

El lema anterior nos sirve para demostrar el siguiente resultado

Teorema 5.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente. Entonces,*

(i) $\mathfrak{L}_K(V,W)$ *y* $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ *son isomorfos.*

(ii) $\dim_K(\mathfrak{L}_K(V,W)) = mn$.

Hemos visto que existía una relación entre las matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Sin embargo, podemos interpretar de nuevo la relación existente entre ellas, teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Proposición 5.3. *Sean V, W y Z tres espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$, $g : W \to Z$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$, $\mathfrak{B}_Z$ bases de V, W y Z y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g)$ las respectivas matrices asociadas. Entonces, $g \circ f$ es una aplicación lineal cuya matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f)$ respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_Z$ satisface*

$$M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f) = M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f) M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g).$$

En vista del resultado anterior, la relaci 'on entre matrices asociadas a la misma aplicación viene determinada como la matriz asociada a la composición $id_W \circ f \circ id_V$ donde id_W (id_V) es la aplicación identidad de W (V) tomando en origen la base $\mathfrak{B}_W$ ($\mathfrak{B}'_V$) y en llegada la base $\mathfrak{B}'_W$ ($\mathfrak{B}_V$).

6. Matriz asociada a una aplicación lineal (notación por columnas).

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W, entonces dado un vector $v \in V$, podemos expresar $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j,$$

siendo $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$. Por tanto, si empleamos la notación por columnas para dar las coordenadas de un vector, podemos dar la siguiente **expresión matricial** de $f(v)$:

$$f(v) = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

y a la matriz $A = (a_{ij})$ se le denomina **matriz asociada a f respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$** en notación por columnas. Es obvio que si conocemos la matriz asociada a una aplicación lineal con respecto a dos bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$, podemos obtener $f(v)$ para cualquier vector v de V, esto es, dada la matriz asociada A, la aplicación lineal f se encuentra totalmente determinada. Además, existe una relación entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal cuando se toman bases diferentes en V y W. En efecto, si A es la matriz asociada a f con respecto a las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ y B es la matriz asociada a f con respecto de las bases $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}'_W$, entonces

$$B = M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}'_W} A M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}.$$

Por otro lado, la matriz asociada a una aplicación lineal nos permite dar una interpretación en términos de aplicaciones lineales de las matrices de cambio de base. Una matriz de cambio de base se puede ver como la matriz asociada a la aplicación lineal a la identidad de un espacio vectorial cuando se toma en origen una base $\mathfrak{B}_V$ y en llegada $\mathfrak{B}'_V$.

El siguiente lema prueba la relación existente entre matrices asociadas cuando sumamos o multiplicamos por un escalar aplicaciones lineales:

Lema 6.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$ y $g : V \to W$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$ bases de V y W y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(g)$ las matrices asociadas a f y g respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ en notación por columnas. Entonces,*

(i) $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f+g) = M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f) + M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(g)$.

(ii) $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(\lambda f) = \lambda M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$.

El lema anterior nos sirve para demostrar el siguiente resultado

Teorema 6.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente. Entonces,*

(i) $\mathfrak{L}_K(V,W)$ *y* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ *son isomorfos.*

(ii) $\dim_K(\mathfrak{L}_K(V,W)) = mn$.

Hemos visto que existía una relación entre las matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Sin embargo, podemos interpretar de nuevo la relación existente entre ellas, teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Proposición 6.3. *Sean V, W y Z tres espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$, $g : W \to Z$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$, $\mathfrak{B}_Z$ bases de V, W y Z y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g)$ las respectivas matrices asociadas en notación por columnas. Entonces,*

$$M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f) = M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g) M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f),$$

siendo $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f)$ la matriz asociada a $g \circ f$ en notación por columnas tomando como bases de V y Z a $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_Z$. En vista del resultado anterior, la relaci 'on entre matrices asociadas a la misma aplicación viene determinada como la matriz asociada a la composición $id_W \circ f \circ id_V$ donde id_W (id_V) es la aplicación identidad de W (V) tomando en origen la base $\mathfrak{B}_W$ ($\mathfrak{B}'_V$) y en llegada la base $\mathfrak{B}'_W$ ($\mathfrak{B}_V$).

7. Matrices equivalentes.

Si $A, B \in Mat_{n\times m}(K)$, se dice que son **matrices equivalentes** si existen matrices inversibles $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y $Q \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(K)$ tales que $A = PBQ$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que dada una matriz $A \in Mat_{n\times m}(K)$ podemos interpretarla como la matriz asociada a una aplicación lineal y que las matrices inversibles se interpretan como matrices de cambio de base, la relación existente entre dos matrices equivalentes fuerza a que éstas estén asociadas a la misma aplicación lineal.

Es obvio que todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal son matrices equivalentes. En efecto, para probarlo basta con tener en cuenta la relación existente entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal, que permite escribir una en términos de otra, empleando las matrices de cambio de base. Además, podemos construir una matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ con entradas de 0 y 1:

Teorema 7.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente y $f : V \to W$ una aplicación lineal con rango r (esto es, $r = \dim(f(V))$). Entonces, existen bases de V y W tales que la matriz asociada a f respecto a ellas es* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para demostrar el teorema anterior, basta con calcular el núcleo de la aplicación lineal f, determinar una base de $\ker(f)$ y completarla por delante hasta obtener una base de V. Tomando las imágenes de los vectores de esta base de V que no estén en el núcleo, se obtiene una base de $\mathrm{Im}(f)$. Esta base puede ser completada por detrás hasta obtener una base de W. Las bases de V y W construidas son las que se necesitan para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La utilidad de esta matriz es grande ya que a través de ella podemos contestar a dos cuestiones:

1. Dada una matriz A de orden adecuado, ¿es matriz asociada a la aplicación f? Si tenemos en cuenta que todas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal son equivalentes a la matriz que figura en el teorema anterior, para saber si A es asociada o no a f, será suficiente con probar si es equivalente a $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para ello, suponemos que A es matriz asociada a f respecto de alguna base de V y W y trabajnado con la nueva expresión matricial de f, tomando A como matriz asociada a f. Si después de

realizar los cálculos con la nueva expresión matricial, obtenemos de nuevo $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces A es matriz asociada a f. En caso contrario, no lo es.

2. Dadas dos matrices del mismo orden, ¿son equivalentes? Basta con interpretarlas como matrices asociadas a aplicaciones lineales y ver si ambas son equivalentes a la misma matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, las matrices iniciales serán equivalentes si y sólo si ambas equivalen a la misma matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo.

1. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ son equivalentes porque ambas equivalen a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En efecto, utilizando la notación por filas, podemos interpretar a A como la matriz asociada a $f : V \to W$ donde $\dim V = 2$, $\dim W = 3$ y se han tomado como bases $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Entonces, $\ker f = \{0_W\}$ y tomando como bases $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2\}$ y $\mathfrak{B}'_W = \{f(v_1), f(v_2), w_3\} = \{w_1 - w_2, w_2 + w_3, w_3\}$, la matriz asociada a f es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, $A = I_2 C \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por la relación existente entre matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Por otro lado, utilizando de nuevo la notación por filas, podemos interpretar a B como la matriz asociada a $f : V \to W$ donde $\dim V = 2$, $\dim W = 3$ y se han tomado como bases $\mathfrak{B}'_V = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathfrak{B}''_W = \{w'_1, w'_2, w'_3\}$. De nuevo, $\ker f = \{0_W\}$ y tomando como bases $\mathfrak{B}'_V = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathfrak{B}'''_W = \{f(v'_1), f(v'_2), w'_3 = \{-w'_1 + w'_3, w'_1 + w'_2 + w'_3, w'_1\}$ obtenemos de nuevo $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pero, $B = I_2 C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, asi que

$$\left.\begin{aligned} A &= I_2 C \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= I_2 C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B = I_2 A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Pero $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, tomando $P = I_2$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se cumple $B = PAQ$, donde P y Q son inversibles. Consecuentemente,

A y B son equivalentes.