Tema 2: Espacios vectoriales.

1. Definición de espacio vectorial y propiedades.

Definición. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(V, +)$ un grupo abeliano. Se dice que V es un K-**espacio vectorial**, si existe una aplicación $f : K \times V \to V$ que verifica las cuatro propiedades siguientes:

(i) $f(1_K, v) = v$, $\forall v \in V$

(ii) $f(\lambda_1 + \lambda_2, v) = f(\lambda_1, v) + f(\lambda_2, v)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

(iii) $f(\lambda, v_1 + v_2) = f(\lambda, v_1) + f(\lambda, v_2)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

(iv) $f(\lambda_1 \lambda_2, v) = f(\lambda_1, f(\lambda_2, v))$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

A esta aplicación se la denomina **multiplicación por un escalar** y se suele emplear la siguiente notación: $f(\lambda, v) = \lambda v$. A los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo K **escalares**.

Ejemplos.

(1) Se considera un cuerpo $(K, +, \cdot)$ y el grupo abeliano $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(K), +)$, siendo

$$\mathrm{Mat}_{n\times m}(K) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in K, 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$$

y $+$ la suma usual de matrices:

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Definimos la multiplicación por un escalar siguiente:

$$\forall \lambda \in K, \forall (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Es fácil ver que esta multiplicación por un escalar cumple (i), (ii), (iii) y (iv), asi que $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

(2) Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y $K^n=\{(k_1,\dots,k_n)|k_i\in K,\forall i\in\{1,2,\dots,n\}\}$. Se define en K^n la siguiente operación interna:

$$\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in K^n,\ (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

y la multiplicación por un escalar:

$$\forall\lambda\in K,\forall(x_1,\dots,x_n)\in K^n,\ \lambda(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$

Es fácil ver que K^n es un K-espacio vectorial.

(3) Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y

$$\mathbb{P}_n(K)=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n|a_i\in K,\ i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$$

el conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes en el cuerpo K y grado menor o igual a n. Si tomamos en $\mathbb{P}_n(K)$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall\lambda\in K$, $\forall a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{P}_n(K)$,

$$\lambda\cdot(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=\lambda a_0+\lambda a_1x+\ldots+\lambda a_nx^n,$$

resulta que $(\mathbb{P}_n(K),+,\cdot)$ es un K-espacio vectorial.

De la propia definición de espacio vectorial se deducen algunas propiedades:

Proposición 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces,*

1. $\lambda 0_V=0_V$, $\forall\lambda\in K$.
2. $0_Kv=0_V$, $\forall v\in V$.
3. $(-1_K)v=-v$, $\forall v\in V$.
4. *Si $\lambda\in K$ y $v\in V$ verifican que $\lambda v=0_V$, entonces $\lambda=0_K$ ó $v=0_V$.*

2. Subespacios vectoriales.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Se dice que S es un K-**subespacio vectorial** de V, y se denota por $S\leq V$, si S con las operaciones suma y multiplicación por un escalar restringidas a S es un K-espacio vectorial.

Tenemos otras caracterizaciones equivalentes para saber si un subconjunto $S \subseteq V$ es un K-subespacio vectorial:

Proposición 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces, son equivalentes*

1. *S es un K- subespacio vectorial de V.*
2. *$\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 + s_2 \in S$ y $\forall \lambda \in K, \forall s \in S, \quad \lambda s \in S$.*
3. *$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall s_1, s_2 \in S, \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$.*

Ejemplos

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cualquier recta que pase por el $(0,0,0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $S = \{(x,y,z) | x - 2y = 0, z + y = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(2) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios en la variable x con coeficientes reales y grado menor o igual a 4, $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, el subconjunto $S = \{a + bx + ax^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

Los subespacios vectoriales son interesantes porque, entre otras propiedades, se cumple que al sumar o intersecar dos subespacios vectoriales obtenemos otro subespacio vectorial tal y como se enuncia en el siguiente resultado:

Proposición 2.2. *Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2 dos K-subespacios de V. Entonces, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_i \in S_i, i = 1, 2\}$ con la suma y la multiplicación por un escalar restringidas a ellos son K-subespacios vectoriales de V.*

A $S_1 \cap S_2$ se le llama **subespacio intersección** de S_1 y S_2 y a $S_1 + S_2$ **subespacio suma** de S_1 y S_2. Si S_1, S_2 son dos subespacios de V tales que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ y $S_1 + S_2 = V$, diremos que V se expresa como **suma directa** de los subespacios S_1 y S_2. Cuando V sea suma directa de S_1 y S_2 escribiremos $V = S_1 \oplus S_2$ y diremos que S_1 (S_2) es un subespacio suplementario de S_2 (S_1).

Del mismo modo que se ha definido la suma e intersección de dos subespacios, se puede definir la suma e intersección de un número finito de subespacios de un espacio vectorial.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $S_1, S_2, \ldots, S_r$ r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio intersección** de S_1, S_2, $\ldots$, S_r a

$$\cap_{i=1}^r S_i = \{v \in V | v \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2, ..., S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio suma** de S_1, S_2, ..., S_r a

$$\sum_{i=1}^{r} S_i = \{v_1 + \ldots + v_r \in V | v_i \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $S_1, S_2, \ldots, S_r$ r K-subespacios vectoriales de V. Se dice que V es **suma directa** de $S_1, S_2, \ldots, S_m$, y se escribe $V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

(i) $\sum_{i=1}^{m} S_i = V$.

(ii) $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$, $S_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} S_j = \{0_V\}$.

3. Base de un espacio vectorial.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \ldots, v_r \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Se llama K-**combinación lineal** de los vectores $v_1, \ldots, v_r$ con escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ al vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.

Nos planteamos ahora el localizar, si es que existe, un subconjunto T del K-espacio vectorial V con menor cardinal tal que cada vector v de V se exprese como **combinación lineal** de los vectores de T, esto es $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t_i$, siendo $t_i \in T$, $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$.

Necesitamos dos conceptos: el de **sistema generador** y el de **conjunto libre**.

Definición. Un subconjunto $T \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es un K-**sistema generador** de V si cualquier vector de V se expresa como combinación lineal de vectores de T.

Definición. Se dice que un espacio vectorial es **finitamente generado** si admite un sistema generador finito.

En lo que sigue, trabajaremos con espacios vectoriales finitamente generados.

Definición. Un subconjunto $T \subseteq V$ se dice que es K-**libre** ó que sus vectores son K-**linealmente independientes** si se cumple la siguiente condición:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K, \forall v_1, \ldots, v_r \in T, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_K.$$

Si un subconjunto T no es libre se dice que es K-**ligado** o que sus vectores son K-**linealmente dependientes**.

Observamos que si tenemos T un K-sistema generador del K-espacio vectorial V que es además K-ligado, existe un vector $v \in T$ que es K-combinación lineal de vectores de $T - \{v\}$. Entonces, es fácil probar que $T - \{v\}$ sigue siendo un sistema generador de V.

Definición. Un subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es una **base**, si $\mathfrak{B}$ es K-sistema generador de V y $\mathfrak{B}$ es K-libre.

Ejemplos

(1) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(2) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

(3) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el conjunto $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$ $\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Cuando estamos ante un espacio vectorial finitamente generado nos interesa saber si existe alguna base de él. La respuesta es afirmativa:

Teorema 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, existe $\mathfrak{B}$ base de V.*

Para demostrar el teorema anterior basta elegir un sistema generador de V y en l eliminar los vectores que sean combinación lineal del resto uno a uno. De esta forma, se construye un subconjunto del sistema generador, que sigue siendo sistema generador y que además es libre.

Por otro lado, es obvio que

Lema 3.2. *Sea V un K-espacio vectorial y $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un subconjunto K-ligado tal que $t_1 \neq 0_V$. Entonces existe $t_j \in T$ tal que t_j es K-combinación lineal de $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}$.*

Empleando este Lema se demuestra

Teorema 3.3.(Teorema del reemplazamiento) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo, $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un K-sistema generador y $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V$ un subconjunto K-libre. Entonces,*

1. $r \leq m$.

2. *Existe* $S \subseteq T$ *tal que* $|S| = m - r$ *y* $U \cup S$ *es un* K*-sistema generador de* V*.*

La clave para demostrar el Teorema del Reemplazamiento es considerar el subconjunto que se forma al ir introduciendo uno a uno los vectores de U en T (colocados por delante) y aplicar el Lema.

Del Teorema del reemplazamiento se deduce de forma inmediata:

Teorema 3.4. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, todas las bases de* V *poseen en mismo cardinal.*

Teniendo en cuenta este último resultado podemos definir:

Definición. Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Se llama **dimensión** de V, y se denota por $\dim_K(V)$ al cardinal de cualquier base de V. Si $V = \{0_V\}$, se dice que su dimensión es 0 y su base es el conjunto vacío.

Existen formas sencillas de localizar una base para los espacios vectoriales de dimensión finita:

Proposición 3.5. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión* n*. Si* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ *es un* K*-sistema generador, entonces* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*.*

Proposición 3.6. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión* n*. Si* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ *es* K*-libre, entonces* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*.*

Podemos relacionar las dimensiones de un K-espacio vectorial y la de sus subespacios:

Teorema 3.7. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión finita* n *y* W *un* K*-subespacio de* V*. Entonces,*

1. W *es finitamente generado y* $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$*.*
2. *Si* $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ *es una base de* W*, entonces existen* $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ *tales que* $\mathfrak{B}_W \cup \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*.*
3. $W = V$ *si y sólo si* $\dim_K(W) = \dim_K(V)$*.*

Al proceso del apartado 2. del Teorema anterior se le llama **completar la base de** W hasta obtener una base de V. Además, si consideramos el subespacio vectorial generado por $v_{r+1}, \ldots, v_n$, esto es, $U =< v_{r+1}, \ldots, v_n >$, resulta que $V = W \oplus U$, es decir, que U es un subespacio suplementario de W.

También podemos calcular la dimensión del subespacio vectorial suma en términos de las dimensiones de los espacios que se suman y de la intersección de éstos.

Proposición 3.8. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean U, W dos K-subespacios de V. Entonces,*

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

4. Coordenadas de un vector.

Dado un espacio vectorial y una base sobre él, es fácil demostrar que

Teorema 4.1. *Sea V un K-espacio vectorial, v un vector de V y $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.*

Se llaman **coordenadas del vector** v en la base $\mathfrak{B}$ a los únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Para denotar las coordenadas de un vector existen dos notaciones: $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ (notación por filas) ó $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ (notación por columnas). La primera surge de expresar

$$v = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

La segunda notación es debida a que también se puede escribir

$$v = (v_1 \ldots v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En Algebra Lineal, se usa tanto una como la otra notación. En cada ejercicio y apartado especificaremos si usamos la notación por filas o por columnas.

Ejemplos.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\mathfrak{B} = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. El vector $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ se expresa como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}$ mediante:

$$(1,2,3,4) = 1(1,1,1,1) + 1(0,1,1,1) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1),$$

por tanto, si empleamos la notación por filas, las coordenadas de $(1,2,3,4)$ en la base $\mathfrak{B}$ son $(1\ 1\ 1\ 1)$, es decir,

$$(1,2,3,4) = (1\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

siendo v_i el i-ésimo vector de $\mathfrak{B}$. En cambio, si tomamos la notación por columnas, el vector $(1,2,3,4)$ tiene por coordenadas en la base $\mathfrak{B}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y se escribirá:

$$(1,2,3,4) = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y como base a $\mathfrak{B}_1 = \{(-1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$, las coordenadas de $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ en $\mathfrak{B}_1$, empleando la notación por filas, son ahora: $(-1\ 3\ 1\ 1)$. Por tanto, las coordenadas de un vector dependen de la base que se elija.

(3) Se considera $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x, esto es,

$$\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0, \cdots, 3\}\}.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{B} = \{1, 1+x, 1+x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Si tomamos el vector $5 + x + x^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, se tiene que

$$5 + x + x^3 = 4 \cdot 1 + 1(1+x) + 0(1+x^2) + 1x^3,$$

luego las coordenadas de $5 + x + x^3$ en la base $\mathfrak{B}$ vienen dadas por $(4\ 1\ 0\ 1)$, si empleamos la notación por filas, ó por $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si empleamos la notación por columnas.

5. Matrices de cambio de base (notación por filas).

Sea V un K-espacio vectorial, $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\mathfrak{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dos bases de V. Dado un vector $v \in K$, sabemos que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in$

K tales que

$$v = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = (\beta_1 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, cada vector de $\mathfrak{B}_1$ se puede expresar como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}_2$, esto es,

$$v_i = (\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \ i = 1, \dots, n,$$

luego

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$v = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

y por la unicidad de coordenadas se tiene:

$$(\beta_1 \dots \beta_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$(\text{coord. de } v \ \mathfrak{B}_2) = (\text{coord. de } v \text{ en } \mathfrak{B}_1) \begin{pmatrix} \text{coord. de } v_1 \text{ en } \mathfrak{B}_2 \\ \text{coord. de } v_2 \text{ en } \mathfrak{B}_2 \\ \vdots \\ \\ \text{coord. de } v_n \text{ en } \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix}.$$

A $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de cambio de coordenadas (de base) de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$** y contiene las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$. La denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$.

Del mismo modo que hemos definido $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ podemos hallar $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Es inmediato que

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} = I_n = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Por tanto, $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$ son matrices inversibles y $M^{-1}_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Además, se puede demostrar que si tenemos una base $\mathfrak{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ y consideramos una matriz $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible (con determinante no nulo) el conjunto $\mathfrak{B}'' = \{v''_1, \ldots, v''_n\}$ donde

$$v''_i = (p_{i1} \ldots p_{in}) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix},$$

es otra base de V.

Ejemplo.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ la -matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ cuando empleamos la notación por filas viene dada por:

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Matrices de cambio de base (notación por columnas).

Sea V un K-espacio vectorial, $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\mathfrak{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dos bases de V. Dado un vector $v \in K$, sabemos que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ tales que

$$v = (v_1 \ldots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$v = (u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, cada vector de $\mathfrak{B}_1$ se puede expresar como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}_2$, esto es,

$$v_i = (u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{1i} \\ \vdots \\ \gamma_{ni} \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n,$$

luego

$$(\, v_1 \cdots v_n\,) = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$v = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

y por la unicidad de coordenadas se tiene:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

A $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de cambio de coordenadas (de base) de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$** y contiene las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$, escritas por columnas. Es decir, en la primera columna aparecen las coordenadas de v_1 en la basae $\mathfrak{B}_2$, en la segunda columna, vienen las coordenadas de v_2 en la basae $\mathfrak{B}_2$ y así sucesivamente. La denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$.

Del mismo modo que hemos definido $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$, podemos hallar $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Es inmediato que

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} = I_n = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Por tanto, $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$ son matrices inversibles y $M^{-1}_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Además, se puede demostrar que si tenemos una base $\mathfrak{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ y consideramos una matriz $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible (con determinante no nulo) el conjunto $\mathfrak{B}'' = \{v''_1, \dots, v''_n\}$ donde

$$v''_i = (v'_1 \cdots v'_n) \begin{pmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix},$$

es otra base de V.

Ejemplo.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ la - matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ cuando empleamos la notación por

columnas viene dada por:

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Más sobre las coordenadas de un vector.

RECUERDA: Cuando se trabajan con vectores y sus coordenadas, debemos adoptar un convenio: escribir las coordenadas del vector por filas o por columnas. Una vez realizada la elección, ésta se debe mantener siempre. Por ejemplo, si elegimos expresar las coordenadas del vector mediante filas, en la matriz del cambio de coordenadas seguiremos adoptando esa notación y las coordenadas de los vectores de una base en términos de la otra se expresarán por filas.