5. Endomorfismos y matrices diagonalizables.

Después de lo visto en los apartados precedentes, disponemos de las herramientas necesarias para caracterizar los endomorfismos y matrices diagonalizables.

Teorema 5.1. (Caracterización de endomorfismos diagonalizables). *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

(i) Su polinomio característico se escinde sobre K, esto es, existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_f(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $dim(V(\lambda)) = m(\lambda)$.

De la demostración del teorema anterior, se deduce que si f es un endomorfismo diagonalizable, una base respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal será aquella que esté formada por vectores propios, tomandose para cada valor propio tantos vectores propios linealmente independientes como nos indique su multiplicidad. Eligiendo esta base, se ve que la matriz asociada a f es diagonal, presentando en su diagonal los valores propios de f repetidos tantas veces como nos indique su multiplicidad. A esta matriz se le denominará **forma diagonal** de f y es única, salvo el orden de los elementos de la diagonal.

Ejemplo.

1. Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x+y, y, y+z)$, es fácil ver que la matriz asociada a f respecto de la base canónica de R^3 escrita en notación por filas es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su polinomio característico viene dado por

$$\chi_f(A) = \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3.$$

Por tanto, sólo hay un valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 3. PeroEntonces,

$$V(1) = \{(x, y, z) | f((x, y, z)) = (x, y, z)\} = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Consecuentemente, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 es 2. Esto implica que f no es diagonalizable.

Por otro lado, si $f : V \to V$ es un endomorfismo tal que tiene $n = dim(V)$ vectores propios linealmente independientes, entonces f es diagonalizable. Así que tenemos otra caracterización equivalente de endomorfismo diagonalizable:

Corolario 5.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si existe $\mathfrak{B}_V$ base de V formada por vectores propios de f.*

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 5.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo que tiene n valores propios distintos dos a dos. Entonces, f es diagonalizable.*

Del mismo modo podemos dar una caracterización para las matrices diagonalizables:

Teorema 5.4. (Caracterización de matrices diagonalizables). *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

(i) Su polinomio característico se escinde sobre K, esto es, existen $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $dim(V_A(\lambda)) = m(\lambda)$.

Cuando $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es diagonalizable, empleando los vectores propios asociados a cada valor propio, se puede construir una matriz de paso P y se puede calcular la llamada **forma diagonal** de A, que es una matriz diagonal semejante a la matriz diagonalizable A. Esta matriz diagonal tendrá en su diagonal los valores propios de A repetidos tantas veces como nos indique su multiplicidad y es única salvo el orden de los elementos de la diagonal.

También podemos enunciar dos corolarios:

Corolario 5.5. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo A tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente:

Corolario 5.6. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$ que tiene n valores propios distintos dos a dos. Entonces, A es diagonalizable.*

Por último, damos respuesta al problema de saber si una matriz es matrz asociada a un endomorfismo diagonalizable en alguna base. Para que esto suceda, se demuestra que una condición necesaria es que el polinomio característico de la matriz y del endomorfismo deben coincidir. Una condición necesaria y suficiente es que ambos tengan la misma forma diagonal. Trasladandolo a matrices, dada una matriz diagonalizable cuaquier otra matriz será semejante a ella si posee su misma forma diagonal.