4. Valores y vectores propios de una matriz. Polinomio característico.

Del mismo modo que en el apartado anterior se han definido los conceptos de valor y vector propio de un endomorfismo, en este apartado se dan los conceptos análogos para una matriz cuadrada. Tanto para definir el concepto de valor propio de una matriz como el de vector propio, se emplea el uso de la notación por filas en las coordenadas de un vector.

Definición. Dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ y un escalar $\lambda \in K$ se dice que λ es un **valor propio** de A si existe $(a_1 \dots a_n) \in Mat_{1\times n}(K) - \{(0 \dots 0)\}$ tal que $(a_1 \dots a_n)A = \lambda(a_1 \dots a_n)$. A $(a_1 \dots a_n)$ se le denominará **vector propio** asociado al valor propio λ.

Si tenemos en cuenta que dada una matriz cuadrada $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n fijada una base $\mathfrak{B}_V$, entonces los vectores propios de A nos dan precisamente las coordenadas de los vectores propios de f en la base $\|B_V$, empleando la notación por filas. En caso de usar la notación por columnas, será necesario definir los vectores propios como vectores columna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ tales que $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ para que se siga manteniendo la interpretación anterior.

Realizando un estudio paralelo al llevado a cabo en el apartado anterior, podemos construir un subespacio $V_A(\lambda)$ que estará formado por todos los vectores propios asociados al valor propio λ y el vector $(0 \dots 0)$, esto es

$$V_A(\lambda) = \{(a_1 \dots a_n) \in Mat_{1\times n}(K) | (a_1 \dots a_n)A = \lambda(a_1 \dots a_n)\}.$$

Este subespacio desempeñará el mismo papel que $V(\lambda)$ a la hora de analizar si una matriz es diagonalizable o no.

Para poder obtener de forma sencilla los valores propios de una matriz tenemos el concepto de **polinomio característico de una matriz** $A \in Mat_{n\times n}(K)$, que es $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$, y el de **ecuación característica**: $\chi_A(x) = 0$.

Se observa que el polinomio característico de una matriz de orden $n \times n$ es de grado n.

Proposición 4.1. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces, las raíces de $\chi_A(x)$ que están en K son los valores propios de A.*

Ejemplo.

1. El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ viene dado por

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3.$$

Por tatno, el único valor propio de A es 1.

Para poder calcular de forma sencilla los valores propios de un endomorfismo $f : V \to V$ necesitamos conocer si existe alguna relación entre los polinomios característicos de dos matrices semejantes. Ahora, se verifica:

Proposición 4.2. *Sean $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ dos matrices semejantes. Entonces, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.*

De las dos últimas proposiciones se deduce:

Corolario 4.3. *Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Por otro lado, como las matrices asociadas a un mismo endomorfismo son semejantes y las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, se puede definir el concepto de **polinomio caraterístico de un endomorfismo**: será el polinomio característico de cualquier matriz asociada a él y se denotará por $\chi_f(x)$. Además, los valores propios del endomorfismo f son precisamente las raíces de su polinomio caraterírístico.

Por último, para finalizar este apartado introducimos el concepto de **multiplicidad algebraica** de un valor propio: es la multiplicidad que presenta como raíz del polinomio característico. Se denotará por $m(\lambda)$.

Existe una relación entre la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica:

Lema 4.4. *Sea λ un valor propio de un endomorfismo $f : V \to V$. Entonces,*

$$dim(V(\lambda)) \leq m(\lambda).$$

Del mismo modo se tiene:

Lema 4.5. *Sea λ un valor propio de $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Entonces,*

$$dim(V_A(\lambda)) \leq m(\lambda).$$