3. Valores y vectores propios de un endomorfismo.

Los conceptos de valor y vector propio de un endomorfismo serán imprescindibles a la hora de resolver el problema de diagonalización que nos hemos planteado en este tema.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo. Un escalar $\lambda \in K$ se dice que es un **valor propio** de f si existe $v \in V - \{0_V\}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $\lambda \in K$ es un valor propio de f y $v \in V - \{0_V\}$ verifica que $f(v) = \lambda v$, se dice que V es un **vector propio** asociado a λ de f.

Ejemplo.

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x+y, y, y+z)$ y sea $\lambda = 1$. Entonces, para cada $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3-\{(0, 0, 0)\}$ se cumple que $f((x, 0, z)) = (x, 0, z)$, luego $\lambda = 1$ es un valor propio de f y $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ vector propio asociado al valor propio 1.

Es fácil demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y λ un valor propio del endomorfismo f. Entonces, el conjunto*

$$V(\lambda) = \{v \in v \mid f(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio f-invariante no nulo, llamado **subespacio fundamental** *asociado al valor propio λ. Además, si $\dim(V(\lambda)) = s$, entonces la matriz asociada a $f|_{\mathfrak{B}_{V(\lambda)}}$ es de la forma λI_s.*

La dimensión de este subespacio, conocida como **multiplicidad geométrica** de λ, será fundamental para poder determinar si un endomorfismo es diagonalizable o no.

Ejemplo.

1. Se considera, de nuevo, la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y, y, y + z)$ y sea $\lambda = 1$. Entonces,

   $$V(1) = \{(x, y, z)|f((x, y, z)) = (x, y, z)\} = \{(x, 0, z)|x, z \in \mathbb{R}\}.$$

   Consecuentemente, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 es 2.

Por último, un resultado que emplearemos posteriormente es:

Proposición 3.2. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y $\lambda_1 \dots \lambda_r$ r valores propios distintos dos a dos de f. Si $v_i \in V(\lambda_i)$ un vector propio asociado al valor propio λ_i, para $i = 1, \dots, r$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto libre.*