2. Subespacios f-invariantes.

En este segundo apartado realizamos una primera aproximación a la resolución del problema planteado mediante los subespacios f-invariantes.

Definición. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ de un K-espacio vectorial V, un subespacio W de V se dice que es **f-invariante** si $f(W) \subseteq W$.

Una característica importante de los subespacios f-invariantes es que si $W \subseteq V$ es un subespacio f-invariante de V y $f : V \to V$, entonces $f|_W : W \to W$ es un endomorfismo de W.

Ejemplo

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x,y,z)) = (-2y + 4z, -x-y+z, 3x-3y+z)$ y el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$. Entonces, U es f-invariante ya que para todo $(x,y,z) \in U$, se cumple que $y = x + z$, luego

   $$f((x,x+z,z)) = (-2(x+z)+4z, -x-x-z+z, 3x-3x-3z+z) = (-2x+2z, -2x, -2z)$$

   y el vector $(-2x+2z, -2x, -2z) \in U$.

Necesitamos una nueva definición:

Definición. Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Se dice que A es una **matriz diagonal por bloques** si

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

donde $B_i \in Mat_{m_i \times m_i}(K)$, para $i = 1, \ldots, s$.

Cuando V se expresa como suma directa de subespacios f-invariantes, esto es $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, las matrices asociadas a f tienen una forma peculiar tal y como se indica en las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y W_1, W_2 dos subespacios de V. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$, *con* W_1, W_2 *subespacios f-invariantes.*

(ii) Existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma: $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$.

Para localizar la base que figura en el apartado (ii) de la Porposición anterior, es suficiente con tomar una base que esté formada por la unión de bases de W_1 y W_2.

Ejemplo.

1. Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x,y,z)) = (-2y + 4z, -x-y+z, 3x-3y+z)$ y los subespacios $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x-y+z=0\}$ y $W_2 = \{(x,0,x) | x \in x$. Entonces, W_1 y W_2 son f-invariantes y $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Por tanto, si tomamos la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ la matriz asociada a f escrita en notación por filas viene dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El resultado anterior se puede generalizar:

Proposición 2.2. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y $W_1, W_2, \ldots, W_t$ subespacios de V. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_t$*, con* W_i*,* $i = 1 \ldots t$*, subespacios* f*-invariantes.*

(ii) Existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma: $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t \end{pmatrix}$.

Por ello, lo que se intentará ver en los siguientes apartados es bajo que condiciones se puede garantizar la existencia de una descomposición de V como suma directa de subespacios f-invariantes tales que los bloques asociados a cada uno de ellos sean matrices diagonales.