1. Planteamiento del problema.

En lo que sigue, trabajamos en un K-espacio vectorial de dimensión finita, que denotaremos por V. Dada $\mathfrak{B}$ una base de V y $f : V \to V$ una aplicación lineal denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ a la matriz asociada a f cuando se toma en V la base $\mathfrak{B}$.

El primer problema que nos planteamos en este tema es el siguiente:

Dado una aplicación lineal $f : V \to V$, esto es un **endomorfismo** de V, deseamos saber bajo que condiciones podemos garantizar la existencia de una base $\mathfrak{B}_V$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal. Cuando esto suceda, diremos que el endomorfismo f es **diagonalizable**. Además, en tal caso, nos interesará dar un método constructivo que nos permita obtener una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Lo primero que debemos observar es que este problema presenta una dificultad: la base que se toma en V la utilizamos en origen y llegada para calcular la matriz asociada a f. Por ello, es de esperar que no todos los endomorfismos sean diagonalizables. De hecho, se verá que para que sean diagonalizables deberán cumplir dos condiciones.

El mismo problema se puede enunciar en términos de matrices. Dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ queremos saber bajo que condiciones existe una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$. Cuando esto sucede se dirá que A es una **matriz diagonalizable**.

Aunque al enunciar los dos problemas parezca que no hay ninguna relación entre ellos, lo cierto es que ambos están intimamente relacionados. En efecto, si nos dan una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a cierto endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n. Teniendo esto en cuenta, el ver si una matriz es diagonalizable es equivalente a estudiar si el endomorfismo asociado es diagonalizable.

Introducimos dos conceptos que nos aparecerán frecuentemente: el de **matrices semejantes** y el de **matriz de paso**.

Definición. Dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz inversible, P, llamada matriz de paso, tal que $A = PBP^{-1}$.

Obviamente, las matrices asociadas a un mismo endomorfismo de un espacio vectorial V son semejantes ya que si $A = M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y $B = M_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, entonces $A = M^{\mathfrak{B}'_V}_{\mathfrak{B}_V} B M^{\mathfrak{B}_V}_{\mathfrak{B}'_V}$, donde $M^{\mathfrak{B}_V}_{\mathfrak{B}'_V}$ es la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}'_V$ a $\mathfrak{B}_V$.

Estas dos últimas definiciones permiten dar otra definición equivalente de matrices diagonalizables: una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Además, si f es un endomorfismo diagonalizable, observamos que todas las matrices asociadas a él son diagonalizables ya que son semejantes a una matriz diagonal.

Por último, para los endomorfismos diagonalizables nos plantearemos el siguiente problema: saber si una matriz es asociada a él o no en alguna base y en caso de serlo, localizar la base.

Asimismo, la versión matricial del problema anterior es saber si dos matrices diagonalizables son o no semejantes y, en caso de serlo, localizar una matriz de paso.