

## 4. Aplicaciones de los determinantes.

Los determinantes presentan varias aplicaciones. Entre ellas, destacan las siguientes:

**Proposición 4.1.(Cálculo de rangos)** *Sea  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$ . Entonces, el rango de  $A$  es  $r$  si y sólo si existe una submatriz de  $A$  de orden  $r \times r$  con determinante no nulo y todas las submatrices de  $A$  de orden  $(r + 1) \times (r + 1)$  tienen determinante 0.*

También sirven los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados, mediante la llamada **Regla de Cramer**:

**Proposición 4.2.(Regla de Cramer)** *Sea  $AX = B$ , donde  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ,  $X, B \in \text{Mat}_{n \times 1}(K)$  un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado. Entonces, la única solución del mismo viene dado por  $x_j = \frac{|C_j|}{|A|}$ , donde  $|C_j|$  es la matriz que se obtiene a partir de  $A$  sustituyendo la columna  $j$ -ésima de  $A$  por  $B$ , para  $j = 1, \dots, n$ .*

Observar que al ser el sistema compatible determinado tenemos que  $\text{rg}(A) = n$  y  $\det(A) \neq 0$ .

**Proposición 4.3.** *Sea  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  una matriz inversible. Entonces,  $A^{-1} = \text{adj}(A)^t |A|^{-1}$ , donde  $\text{adj}(A)$  es la matriz adjunta de  $A$ .*