## 3. Cálculo de determinantes mediante desarrollos.

**Definición.** Dada una matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, se llama **adjunto del elemento** $ij$, donde $1 \leq i, j \leq n$ a $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo $\Delta_{ij}$ el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila $i$ y la columna $j$ en $A$. A la matriz $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ tal que

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

se le llama **matriz adjunta de** $A$.

**Proposición 3.1.** *Sea* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. *Entonces,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

A la expresión que aparece en la Proposición anterior se le conoce como **desarrollo del determinante de** $A$ **por la fila** $i$**-ésima**.

**Proposición 3.2.** *Sea* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. *Entonces,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

A la expresión que aparece en la Proposición anterior se le llama **desarrollo del determinante de** $A$ **por la columna** $j$**-ésima**.

La importancia de poder calcular determinantes de matrices cuadradas mediante desarrollos por filas o columnas estriba en que da un método para calcular determinantes basado en el cálculo de determinantes de matrices de orden inferior. Así, si se desea calcular el determinante de una matriz $4x4$, bastará con calcular 4 determinantes de matrices de orden $3x3$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$