2. Determinante de una matriz.

Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Se llama **determinante** de A, y se denota por $\det(A)$, al escalar

$$\det(A) = |A| = \sum_{\alpha\in\Sigma_n} e_\alpha a_{\alpha(1)1}\dots a_{\alpha(n)n}.$$

Ejemplos

1. Si $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$, entonces $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. Si $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$, entonces $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} -$ $a_{13}a_{31}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{23}a_{31} + -a_{13}a_{32}a_{21}$.

3. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ es una matriz triangular, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Los determinantes tienen las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y A^t es su matriz traspuesta, entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

2. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ tiene dos columnas (filas) iguales, entonces $\det(A) = 0$.

3. Si en la matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se multiplica una columna (una fila) por el escalar λ, entonces el determinante de la matriz resultante es $\lambda\det(A)$.

4. El determinante de la matriz A no cambia si se sustituye la columnna (fila) i por ella misma más una combinación lineal de las restantes columnas (filas).

5. Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y a la columna $A^{(i)}$ (fila $A_{(i)}$) le añadimos $B \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ ($B \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$), entonces el determinante de la matriz C resultante verifica $\det(C) = \det(A) + \det(D)$, donde $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ es la matriz que tiene por columnas (filas) las mismas que la matriz A salvo la i-ésima que es B.

6. Si en la matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se intercambian de posición dos columnas (ó filas), el determinante de la matriz resultante B verifica $\det(B) = -\det(A)$.

7. Si $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, entonces $|AB| = |A||B|$.

Las propiedades anteriores nos sirven para calcular determinantes de matrices. Por ello, realizaremos operaciones en las matrices para conseguir determinantes de matrices que estén relacionados con el determinante de la matriz original y sean más sencillos de calcular. Una estrategia buena puede ser ir haciendo '0' en la matriz para conseguir una matriz triangular, cuyo determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Por otro lado, los determinantes nos sirven para caracterizar las matrices inversibles:

Proposición 2.1. *Una matriz* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ *es inversible si y sólo si* $|A| \neq 0$. *Además, si* A *es inversible,* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.