1. El grupo simétrico.

Definición. Una **permutación** del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ es una aplicación biyectiva de $\{1,\ldots,n\}$ en si mismo.

Se define el conjunto

$$\Sigma_n = \{f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid f \text{ es una permutación } \}$$

En este conjunto definimos el **producto** de dos permutaciones $f, g \in \Sigma_n$ mediante $fg = g \circ f$, donde $\circ$ es composición usual de aplicaciones.

Es fácil ver que

Proposición 1.1. $(\Sigma_n, \cdot)$ *es un grupo, llamado* **grupo simétrico de grado** n.

Una notación sencilla para denotar las permutaciones $f \in \Sigma_n$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

En la primera fila se colocan los elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ y debajo de cada elemento su imagen.

Ejemplo.

1. La permutación $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ definida por

$$\begin{array}{llll} f(1) = 3 & f(2) = 7 & f(3) = 2 & f(4) = 5 \\ f(5) = 6 & f(6) = 4 & f(7) = 1 & f(8) = 8 \end{array}$$

se escribirá

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Definición. Una **trasposición** de $(\Sigma_n, \cdot)$ es una permutación $f \in \Sigma_n$ que verifica que existen dos elementos distintos $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, tales que

$$f(i) = j, \quad f(j) = i \quad f(k) = k, \forall k \in \{1,\ldots,n\} - \{i,j\} \tag{1}$$

Las trasposiciones se suelen denotar por $(i \quad j)$, donde $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ verifican (1).

Ejemplo.

1. La trasposición $(2\ 7) \in \Sigma_8$ es la aplicación biyectiva tal que $f(i) = i$, para $i \in \{1,3,4,5,6,8\}$, $f(2) = 7$ y $f(7) = 2$.

Definición. Un **ciclo de longitud** r de Σ_n es una permutación f de Σ_n para la que existen $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, donde $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$, tales que

$$\begin{aligned} f(i_j) &= i_{j+1}, \text{ para } j = 1, \ldots, r-1, \\ f(i_r) &= i_1 \\ f(k) &= k, \text{ si } k \in \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_r\} \end{aligned}$$

Los r-ciclos se suelen denotar por $(i_1 \ldots i_r)$.

Dos ciclos de Σ_n, $(i_1 \ldots i_r)$ y $(j_1 \ldots j_s)$ se dice que son **disjuntos** si $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\}$ es el conjunto vacío.

Ejemplo.

1. El ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$ es la aplicación biyectiva tal que $f(i) = i$, para $i \in \{4,5,6,8\}$, $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 7$ y $f(7) = 1$.

2. Los ciclos $(1\ 3\ 2\ 7), (6\ 4\ 5) \in \Sigma_8$ son disjuntos.

Los ciclos nos permiten expresar cualquier permutación como producto de ciclos disjuntos. En efecto,

Proposición 1.2. *Sea $f \in \Sigma_n$ una permutación. Entonces, f se expresa de forma única como producto de ciclos disjuntos, salvo el orden de los factores.*

Ejemplo.

1. Consideramos la aplicación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Para buscar su descomposición en ciclos disjuntos procedemos de la siguiente manera:

(a) Buscamos el primer elemento tal que $f(i) \neq i$. En esta caso, $i = 1$.

(b) Realizamos las imágenes sucesivas de i, esto es, $f(i)$, $f(f(i))$, $f(f(f(i)))$, $\cdots$ hasta que $f^k(i) = i$. En este caso $f(1) = 3$, $f(f(1)) = 2$, $f(f(f(1))) = 7$ $f(f(f(f(1)))) = 1$

(c) Se construye el ciclo $(f(i)\ f(f(i))\ \cdots f^k(i))$. En este caso, (3 2 7 1).

(d) Se repiten los pasos (a), (b) y (c) con el resto de los valores de $\{1, 2, \cdots, n\}$ que no figuren el los ciclos construidos en pasos anteriores y hasta que los valores que nos queden verifiquen $f(k) = k$. En este caso, tomamos $i = 4$ y construimos el ciclo (5 6 4).

(e) Entonces, la permutación f será el producto de los ciclos construidos. En nuestro ejemplo, (3 2 7 1)(5 6 4). Como se observa, por la forma de construcción, los ciclos que aparecen en el producto son disjuntos.

Proposición 1.3. *Sea $(i_1 \dots i_r) \in \Sigma_n$ un ciclo de longitud r. Entonces, $(i_1 \dots i_r)$ se descompone como producto de trasposiciones.*

Para demostrar la Proposición anterior es suficiente con encontrar una descomposición del ciclo en trasposiciones. Así, si tomamos $(i_1 \dots i_r) \in \Sigma_n$ basta tomar el producto de trasposiciones $(i_1\ i_r)(i_r\ i_{r-1})(i_{r-1}\ i_{r-2}) \cdots (i_3\ i_2)$.

Ejemplo.

1. Tomamos el ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$. Entonces, un producto de trasposiciones que nos da el ciclo es: (1 7)(7 2)(2 3).

Utilizando que cada permutación se escribe como producto de ciclos disjuntos y que cada ciclo es producto de trasposiciones, es fácil demostrar:

Corolario 1.4. *Cada permutación de Σ_n se expresa como producto de trasposiciones.*

Proposición 1.5. *Sea f una permutación de Σ_n. Si se descompone como un número par (impar) de trasposiciones, entonces cualquier descomposición de f en producto de trasposiciones tendrá un número par (impar) de trasposiones.*

Definición. Sea f una permutación de Σ_n. Se llama **signatura** de f, y se denota por e_f, a

$$e_f = \begin{cases} 1, & \text{si } f \text{ se descompone como un producto de un número par de trasposiciones;} \\ -1, & \text{si } f \text{ se descompone en un producto de un número impar de trasposiciones.} \end{cases}$$

Ejemplo.

1. Tomamos el ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$. Sabemos que un producto de trasposiciones que nos da el ciclo es: (1 7)(7 2)(2 3). Entonces, la signatura del ciclo $(1\ 3\ 2\ 7) \in \Sigma_8$ es -1 ya

que cualquier producto de trasposiciones que dé (1 3 2 7) tiene un número impar de trasposiciones.

Se observa que la signatura de la permutación f y la de f^{-1} son iguales.