4. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones lineales en las variables $x_1, \ldots, x_m$. Se dice que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$ es una solución del sistema si se verifica $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = B$.

Resolver una sistema de ecuaciones lineales consiste en localizar todas las soluciones del mismo, si es que existen. Cuando un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución se dice que es **incompatible**.

Si tiene al menos una solución se dice que el sistema es **compatible**. Si en un sistema compatible hay una única solución diremos que el sistema es **determinado** y si hay más de una solución es **indeterminado**.

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son todos compatibles ya que admiten al menos una solución: $\begin{pmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$. A esta solución se le conoce como **solución trivial**. Con el siguiente teorema podemos saber de forma rápida si un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es compatible o no:

Teorema 4.1.(Teorema de Rouché-Frobenius) *Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Entonces, es compatible si y sólo si el rango de la matriz del sistema y el rango de la matriz ampliada coinciden, esto es,*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B).$$

Proposición 4.2. *Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$. Entonces, las soluciones del sistema homogéneo forman el núcleo de la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) & \longrightarrow & K^n \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m, \ldots, a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m). \end{array}$$

Proposición 4.3. *Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo compatible y $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ es una solución del mismo. Entonces, todas las soluciones del sis-*

tema vienen dadas por $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} + \mathrm{Ker}(\psi)$*, donde* ψ *es la aplicación lineal definida en la proposición anterior.*

Una vez resuelto el saber cuando existe solución y cómo son las soluciones una vez que se conoce una, queda pendiente localizar, precisamente, esta solución particular para luego poder construir todas las soluciones una vez calculado el núcleo de ψ.

Para los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, una forma de localizar la solución particular es realizando tranasformaciones elementales en las **filas** de la matriz ampliada, hasta conseguir otro sistema que tenga por matriz una triangular. De este modo, el nuevo sistema resultante tendrá la misma solución que el sistema de partida pero es más sencillo de resolver.