2. Transformaciones elementales. Cálculo del rango.

En esta apartado se da un método para calcular el rango de una matriz empleando transformaciones elementales.

Definición. Una **transformación elemental** consiste en realizar una de las siguientes acciones en la matriz A:

1. Intercambiar dos filas (ó dos columnas) de posición.
2. Cambiar una fila (ó columna) por λ ella misma, siendo $\lambda \in K - \{0\}$.
3. Sustituir una fila (ó columna) por ella misma más una combinación lineal del resto de las filas (ó columnas).

Al aplicar cualquiera de las transformaciones elementales anteriores el rango de una matriz A no varía. Por tanto, podemos emplear estas transformaciones aplicadas a una matriz A para calcular su rango, pasando de la matriz dada A a otra más sencilla que tenga su mismo rango por haber realizado sólo tranformaciones elementales. Se entenderá por matriz más sencilla aquella que presente entradas 0 fuera de la diagonal principal o al menos por debajo ó por encima de la misma.

Las **matrices elementales** que realizan en A las transformaciones elementales son:

$$P_{ij} = (p_{kl}) \in Mat_{s\times s}(K), \qquad p_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l,\, k \neq i,j \\ 0 & k=l=i \\ 0 & k=l=j \\ 0 & k\neq l,\, (k,l) \notin \{(i,j),(j,i)\} \\ 1 & (k,l) \in \{(i,j),(j,i)\} \end{cases}$$

$$T_{ij}(\lambda) = (t_{kl}) \in Mat_{s\times s}(K), \qquad t_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k\neq l \text{ y } (k,l) \neq (i,j) \\ \lambda & (k,l)=(i,j) \end{cases}$$

$$Q_i(\lambda) = T_{ii}(\lambda) \in Mat_{s\times s}(K).$$

En el caso de $T_{ij}(\lambda)$ y de $Q_i(\lambda)$ se toma $\lambda \in K - \{0\}$ para que la matriz resultante sea inversible. Tomando el parámetro s el valor adecuado para poder realizar el producto de matrices, es claro que

1. $P_{ij}A$ intercambia en A las filas i y j.
2. AP_{ij} intercambia en A las columnas i y j.
3. $T_{ij}(\lambda)A$ sustituye la fila i-ésima de A por $A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$.
4. $AT_{ji}(\lambda)$ sustituye la columna i-ésima de A por $A^{(i)} + \lambda A^{(j)}$.

5. $Q_i(\lambda)A$ sustituye la fila i-ésima de A por $\lambda A_{(i)}$.

6. $AQ_i(\lambda)$ sustituye la columna i-ésima de A por $\lambda A^{(i)}$.

Se observa que al realizar transformaciones elementales en realidad estamos multiplicando la matriz A por matrices inversibles, luego la matriz A y la obtenida tras la multiplicación son matrices equivalentes. Este hecho es el que garantiza que el rango de A y de la matriz resultante coincide.

Ejemplo.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Sabemos que $rg(A) \leq 3$. Lo calculamos empleando transformaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_{32}(-1)T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)AT_{42}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_3(-1)T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)AT_{42}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa hemos ido anotando las transformaciones elementales que hemos ido realizando para poder obtener de forma rápida las matrices $P \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tales que $PAQ = B$. Tomamos $P = Q_3(-1)T_{31}(-1)T_{32}(-1)T_{12}(-1)$ y $Q = T_{42}(-1)$. Observamos que P lleva las transformaciones por filas que hemos realizado y Q lleva las transformaciones elementales por columnas realizadas.