1. Rango de una matriz.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **rango de filas** de A, y se denota por $\mathrm{rg}_f(A)$ la dimensión del subespacio vectorial generado por las filas de la matriz A, esto es,

$$\mathrm{rg}_f(A) = \dim_k < A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} >,$$

donde $A_{(j)}$ es la j-ésima fila de A.

De la propia definición se observa que el rango de filas de $A \in Mat_{n\times m}(K)$ es menor o igual que n el número de filas de A.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **rango de columnas** de A, y se denota por $\mathrm{rg}_c(A)$, a la dimensión del subespacio vectorial generado por las columnas de la matriz A, esto es,

$$\mathrm{rg}_c(A) = \dim_k < A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} >,$$

siendo $A^{(j)}$ es la j-ésima columna de A.

Observamos que

$$\mathrm{rg}_c(A) \leq m,$$

donde m es el número de columnas de A.

Nuestro objetivo es probar que para cualquier matriz $A \in Mat_{n\times m}(K)$ se verifica que

$$\mathrm{rg}_f(A) = \mathrm{rg}_c(A).$$

Utilizaremos las aplicaciones lineales para demostrarlo.

Teorema 1.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, $f : V \to W$ una aplicación lineal $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$ bases de V y W y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ la matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$. Entonces,* $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rg}_f(M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f))$.

Corolario 1.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces, todas las matrices asociadas a f tienen el mismo rango de filas.*

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Se llama **matriz traspuesta** de A, y se denota por A^t, a la matriz de orden $m \times n$ cuyas filas son las columnas de A.

Es obvio que el rango de filas de A^t coincide con el rango de columnas de A. Con ello demostraremos:

Teorema 1.3. *Sea* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$*. Entonces,* $rg_f(A) = rg_c(A)$*.*

La importancia de que $rg_f(A) = rg_c(A)$ radica en que podemos definir el concepto de **rango** de una matriz como el número de filas o de columnas linealmente independientes. Lo denotaremos por $rg(A)$.

Observamos que todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal tienen el mismo rango y éste coincide con el rango de la aplicación lineal, esto es, con la dimensión del espacio vectorial $f(V)$.

En el caso de matrices cuadradas, el rango nos permite caracterizar a las matrices inversibles, tal y como aparece en el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Sea* $A \in Mat_{n\times n}(K)$*. Entonces,* A *es inversible si y sólo si* $rg(A) = n$*.*

Para ello, si A es una matriz inversible construimos una aplicación lineal cuya matriz asociada sea A y se comprueba que A es equivalente a I_n y, por tanto, $rg(A) = n$. Recíprocamente, si $rg(A) = n$ la aplicación lineal construida cuya matriz asociada es A verifica que I_n es otra matriz asociada luego $A = PI_nQ$, con P y Q inversibles, luego A es inversible.