7. Matrices equivalentes.

Si $A, B \in Mat_{n\times m}(K)$, se dice que son **matrices equivalentes** si existen matrices inversibles $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y $Q \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(K)$ tales que $A = PBQ$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que dada una matriz $A \in Mat_{n\times m}(K)$ podemos interpretarla como la matriz asociada a una aplicación lineal y que las matrices inversibles se interpretan como matrices de cambio de base, la relación existente entre dos matrices equivalentes fuerza a que éstas estén asociadas a la misma aplicación lineal.

Es obvio que todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal son matrices equivalentes. En efecto, para probarlo basta con tener en cuenta la relación existente entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal, que permite escribir una en términos de otra, empleando las matrices de cambio de base. Además, podemos construir una matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ con entradas de 0 y 1:

Teorema 7.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente y $f : V \to W$ una aplicación lineal con rango r (esto es, $r = \dim(f(V))$). Entonces, existen bases de V y W tales que la matriz asociada a f respecto a ellas es $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Para demostrar el teorema anterior, basta con calcular el núcleo de la aplicación lineal f, determinar una base de $\ker(f)$ y completarla por delante hasta obtener una base de V. Tomando las imágenes de los vectores de esta base de V que no estén en el núcleo, se obtiene una base de $\mathrm{Im}(f)$. Esta base puede ser completada por detrás hasta obtener una base de W. Las bases de V y W construidas son las que se necesitan para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La utilidad de esta matriz es grande ya que a través de ella podemos contestar a dos cuestiones:

1. Dada una matriz A de orden adecuado, ¿es matriz asociada a la aplicación f? Si tenemos en cuenta que todas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal son equivalentes a la matriz que figura en el teorema anterior, para saber si A es asociada o no a f, será suficiente con probar si es equivalente a $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para ello, suponemos que A es matriz asociada a f respecto de alguna base de V y W y trabajnado con la nueva expresión matricial de f, tomando A como matriz asociada a f. Si después de realizar los cálculos con la nueva expresión matricial, obtenemos de nuevo $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces A es matriz asociada a f. En caso contrario, no lo es.

2. Dadas dos matrices del mismo orden, ¿son equivalentes? Basta con interpretarlas

como matrices asociadas a aplicaciones lineales y ver si ambas son equivalentes a la misma matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, las matrices iniciales serán equivalentes si y sólo si ambas equivalen a la misma matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo.

1. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ son equivalentes porque ambas equivalen a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En efecto, utilizando la notación por filas, podemos interpretar a A como la matriz asociada a $f : V \to W$ donde $\dim V = 2$, $\dim W = 3$ y se han tomado como bases $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Entonces, $\ker f = \{0_W\}$ y tomando como bases $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2\}$ y $\mathfrak{B}'_W = \{f(v_1), f(v_2), w_3\} = \{w_1 - w_2, w_2 + w_3, w_3\}$, la matriz asociada a f es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, $A = I_2 C \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por la relación existente entre matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Por otro lado, utilizando de nuevo la notación por filas, podemos interpretar a B como la matriz asociada a $f : V \to W$ donde $\dim V = 2$, $\dim W = 3$ y se han tomado como bases $\mathfrak{B}'_V = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathfrak{B}''_W = \{w'_1, w'_2, w'_3\}$. De nuevo, $\ker f = \{0_W\}$ y tomando como bases $\mathfrak{B}'_V = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathfrak{B}'''_W = \{f(v'_1), f(v'_2), w'_3 = \{-w'_1 + w'_3, w'_1 + w'_2 + w'_3, w'_1\}$ obtenemos de nuevo $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pero, $B = I_2 C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, asi que

$$\left.\begin{array}{l} A = I_2 C \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = I_2 C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow B = I_2 A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Pero $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, tomando $P = I_2$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se cumple $B = PAQ$, donde P y Q son inversibles. Consecuentemente, A y B son equivalentes.