6. Matriz asociada a una aplicación lineal (notación por columnas).

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W, entonces dado un vector $v \in V$, podemos expresar $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j,$$

siendo $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$. Por tanto, si empleamos la notación por columnas para dar las coordenadas de un vector, podemos dar la siguiente **expresión matricial** de $f(v)$:

$$f(v) = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

y a la matriz $A = (a_{ij})$ se le denomina **matriz asociada a f respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$** en notación por columnas. Es obvio que si conocemos la matriz asociada a una aplicación lineal con respecto a dos bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$, podemos obtener $f(v)$ para cualquier vector v de V, esto es, dada la matriz asociada A, la aplicación lineal f se encuentra totalmente determinada. Además, existe una relación entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal cuando se toman bases diferentes en V y W. En efecto, si A es la matriz asociada a f con respecto a las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ y B es la matriz asociada a f con respecto de las bases $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}'_W$, entonces

$$B = M_{\mathfrak{B}_W, \mathfrak{B}'_W} A M_{\mathfrak{B}'_V, \mathfrak{B}_V}.$$

Por otro lado, la matriz asociada a una aplicación lineal nos permite dar una interpretación en términos de aplicaciones lineales de las matrices de cambio de base. Una matriz de cambio de base se puede ver como la matriz asociada a la aplicación lineal a la identidad de un espacio vectorial cuando se toma en origen una base $\mathfrak{B}_V$ y en llegada $\mathfrak{B}'_V$.

El siguiente lema prueba la relación existente entre matrices asociadas cuando sumamos o multiplicamos por un escalar aplicaciones lineales:

Lema 6.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$ y $g : V \to W$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$ bases de V y W y $M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(g)$ las matrices asociadas a f y g respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ en notación por columnas. Entonces,*

(i) $M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(f + g) = M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(f) + M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(g)$.

(ii) $M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(\lambda f) = \lambda M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(f)$.

El lema anterior nos sirve para demostrar el siguiente resultado

Teorema 6.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente. Entonces,*

(i) $\mathfrak{L}_K(V, W)$ *y* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ *son isomorfos.*

(ii) $\dim_K(\mathfrak{L}_K(V, W)) = mn$.

Hemos visto que existía una relación entre las matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Sin embargo, podemos interpretar de nuevo la relación existente entre ellas, teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Proposición 6.3. *Sean V, W y Z tres espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$, $g : W \to Z$ dos aplicaciones lineales $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}_W$, $\mathfrak{B}_Z$ bases de V, W y Z y $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g)$ las respectivas matrices asociadas en notación por columnas. Entonces,*

$$M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f) = M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}_Z}(g)M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f),$$

siendo $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_Z}(g \circ f)$ la matriz asociada a $g \circ f$ en notación por columnas tomando como bases de V y Z a $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_Z$. En vista del resultado anterior, la relaci 'on entre matrices asociadas a la misma aplicación viene determinada como la matriz asociada a la composición $id_W \circ f \circ id_V$ donde id_W (id_V) es la aplicación identidad de W (V) tomando en origen la base $\mathfrak{B}_W$ ($\mathfrak{B}'_V$) y en llegada la base $\mathfrak{B}'_W$ ($\mathfrak{B}_V$).