1. Definición de aplicación lineal y propiedades.

Definición. Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación lineal** si se verifica la siguiente condición:

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v'), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall v, v' \in V.$$

Las aplicaciones lineales también suelen recibir el nombre de **homomorfismos** entre espacios vectoriales. Un **monomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ inyectiva. Un **epimorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ sobreyectiva. Un **isomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ biyectiva. Si $V = W$ y $f : V \to V$ es una aplicación lineal, se dice que f es un **endomorfismo** del espacio vectorial V y si además es biyectiva, se dice que es un **automorfismo** de V.

Ejemplos.

(1) La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y, y + 2z)$ es lineal.

(2) La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x + y + 1, y + 2z)$ no es lineal.

Las aplicaciones lineales f tienen diversas propiedades. Entre ellas destacan las siguientes:

Proposición 1.1. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces,*

(i) $f(0_V) = 0_W$.

(ii) $f(-v) = -f(v)$, $\forall v \in V$.

(iii) $f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_i \in K$, $\forall v_i \in V$.

(iv) Si $\{v_1, \ldots v_m\}$ es un subconjunto ligado de V, entonces $\{f(v_1), \ldots f(v_m)\}$ es un subconjunto ligado de W.

(v) Si U es un subespacio de V, entonces $f(U) = \{f(u) | u \in U\}$ es un subespacio de W. Además, si $\dim(U) = m$, entonces $\dim(f(U)) \leq m$.

(vi) Si T es un subespacio de W, entonces $f^{-1}(T) = \{v \in V | f(v) \in T\}$ es un subespacio de V.

Observamos que en el enunciado del teorema anterior no indicamos que sucede cuando se toman imágenes de subconjuntos libres. En general, esta característica no se mantiene.

Esto es si S es un subconjunto libre de V y $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces **no** podemos garantizar que $f(S)$ sea un subconjunto libre de W. Como veremos más adelante, será necesario pedir que f sea además inyectiva para poder asegurar que subconjuntos libres de V tienen por imagen subconjuntos libres de W.

En el apartado (v) de la Proposición 1.1, hemos visto que $f(U)$ es un subespacio de W para cualquier subespacio U de V. En particular si tomamos $U = V$, obtenemos que $f(V)$ es un subespacio de W llamado **K-subespacio imagen de** V. Además, hemos visto que $\dim(f(V)) \leq \dim(V)$. A $\dim(f(V))$ se le llama **rango** de f. $f(V)$ también se suele denotar por $\mathrm{Im} f$.