6. Matrices de cambio de base (notación por columnas).

Sea V un K-espacio vectorial, $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathfrak{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ dos bases de V. Dado un vector $v \in K$, sabemos que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tales que

$$v = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$v = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, cada vector de $\mathfrak{B}_1$ se puede expresar como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}_2$, esto es,

$$v_i = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{1i} \\ \vdots \\ \gamma_{ni} \end{pmatrix}, \; i = 1, \dots, n,$$

luego

$$(\, v_1 \cdots v_n \,) = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$v = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

y por la unicidad de coordenadas se tiene:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

A $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de cambio de coordenadas (de base) de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$** y contiene las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$, escritas por columnas. Es decir, en la primera columna aparecen las coordenadas de v_1 en la basae $\mathfrak{B}_2$, en la segunda columna, vienen las coordenadas de v_2 en la basae $\mathfrak{B}_2$ y así sucesivamente. La denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$.

Del mismo modo que hemos definido $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$, podemos hallar $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Es inmediato que

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} = I_n = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Por tanto, $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$ son matrices inversibles y $M^{-1}_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Además, se puede demostrar que si tenemos una base $\mathfrak{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ y consideramos una matriz $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible (con determinante no nulo) el conjunto $\mathfrak{B}'' = \{v''_1, \ldots, v''_n\}$ donde

$$v''_i = (v'_1 \cdots v'_n)\begin{pmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix},$$

es otra base de V.

Ejemplo.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ la - matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ cuando empleamos la notación por columnas viene dada por:

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$