5. Matrices de cambio de base (notación por filas).

Sea V un K-espacio vectorial, $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathfrak{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ dos bases de V. Dado un vector $v \in K$, sabemos que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tales que

$$v = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = (\beta_1 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, cada vector de $\mathfrak{B}_1$ se puede expresar como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}_2$, esto es,

$$v_i = (\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \ i = 1, \dots, n,$$

luego

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$v = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

y por la unicidad de coordenadas se tiene:

$$(\beta_1 \dots \beta_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$(\text{coord. de } v \ \mathfrak{B}_2) = (\text{coord. de } v \text{ en } \mathfrak{B}_1) \begin{pmatrix} \text{coord. de } v_1 \text{ en } \mathfrak{B}_2 \\ \text{coord. de } v_2 \text{ en } \mathfrak{B}_2 \\ \vdots \\ \text{coord. de } v_n \text{ en } \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix}.$$

A $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de cambio de coordenadas (de base) de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$** y contiene las coordenadas (escritas en notación por filas) de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$. La denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$.

Del mismo modo que hemos definido $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ podemos hallar $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Es inmediato que

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} = I_n = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Por tanto, $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$ son matrices inversibles y $M^{-1}_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Además, se puede demostrar que si tenemos una base $\mathfrak{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ y consideramos una matriz $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible (con determinante no nulo) el conjunto $\mathfrak{B}'' = \{v''_1, \ldots, v''_n\}$ donde

$$v''_i = (p_{i1} \ldots p_{in}) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix},$$

es otra base de V.

Ejemplo.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ la -matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ cuando empleamos la notación por filas viene dada por:

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$