4. Coordenadas de un vector.

Dado un espacio vectorial y una base sobre él, es fácil demostrar que

Teorema 4.1. *Sea V un K-espacio vectorial, v un vector de V y $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.*

Se llaman **coordenadas del vector** v en la base $\mathfrak{B}$ a los únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Para denotar las coordenadas de un vector existen dos notaciones: $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ (notación por filas) ó $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ (notación por columnas). La primera surge de expresar

$$v = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

La segunda notación es debida a que también se puede escribir

$$v = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En Algebra Lineal, se usa tanto una como la otra notación. En cada ejercicio y apartado especificaremos si usamos la notación por filas o por columnas.

Ejemplos.

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\mathfrak{B} = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. El vector $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ se expresa como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}$ mediante:

$$(1,2,3,4) = 1(1,1,1,1) + 1(0,1,1,1) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1),$$

por tanto, si empleamos la notación por filas, las coordenadas de $(1,2,3,4)$ en la base $\mathfrak{B}$ son $(1\ 1\ 1\ 1)$, es decir,

$$(1,2,3,4) = (1\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

siendo v_i el i-ésimo vector de $\mathfrak{B}$. En cambio, si tomamos la notación por columnas, el vector $(1,2,3,4)$ tiene por coordenadas en la base $\mathfrak{B}$ a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ y se escribirá:

$$(1,2,3,4) = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(2) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y como base a $\mathfrak{B}_1 = \{(-1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$, las coordenadas de $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ en $\mathfrak{B}_1$, empleando la notación por filas, son ahora: $(-1\ 3\ 1\ 1)$. Por tanto, las coordenadas de un vector dependen de la base que se elija.

(3) Se considera $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x, esto es,

$$\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0,\cdots,3\}\}.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{B} = \{1, 1+x, 1+x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Si tomamos el vector $5 + x + x^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, se tiene que

$$5 + x + x^3 = 4 \cdot 1 + 1(1+x) + 0(1+x^2) + 1x^3,$$

luego las coordenadas de $5 + x + x^3$ en la base $\mathfrak{B}$ vienen dadas por $(4\ 1\ 0\ 1)$, si empleamos la notación por filas, ó por $\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ si empleamos la notación por columnas.