3. Base de un espacio vectorial.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \ldots, v_r \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Se llama K-**combinación lineal** de los vectores $v_1, \ldots, v_r$ con escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ al vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.

Nos planteamos ahora el localizar, si es que existe, un subconjunto T del K-espacio vectorial V con menor cardinal tal que cada vector v de V se exprese como **combinación lineal** de los vectores de T, esto es $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t_i$, siendo $t_i \in T$, $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$.

Necesitamos dos conceptos: el de **sistema generador** y el de **conjunto libre**.

Definición. Un subconjunto $T \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es un K-**sistema generador** de V si cualquier vector de V se expresa como combinación lineal de vectores de T.

Definición. Se dice que un espacio vectorial es **finitamente generado** si admite un sistema generador finito.

En lo que sigue, trabajaremos con espacios vectoriales finitamente generados.

Definición. Un subconjunto $T \subseteq V$ se dice que es K-**libre** ó que sus vectores son K-**linealmente independientes** si se cumple la siguiente condición:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K, \forall v_1, \ldots, v_r \in T, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_K.$$

Si un subconjunto T no es libre se dice que es K-**ligado** o que sus vectores son K-**linealmente dependientes**.

Observamos que si tenemos T un K-sistema generador del K-espacio vectorial V que es además K-ligado, existe un vector $v \in T$ que es K-combinación lineal de vectores de $T - \{v\}$. Entonces, es fácil probar que $T - \{v\}$ sigue siendo un sistema generador de V.

Definición. Un subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es una **base**, si $\mathfrak{B}$ es K-sistema generador de V y $\mathfrak{B}$ es K-libre.

Ejemplos

(1) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\mathfrak{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(2) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

(3) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el conjunto $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$ $\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Cuando estamos ante un espacio vectorial finitamente generado nos interesa saber si existe alguna base de él. La respuesta es afirmativa:

Teorema 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, existe $\mathfrak{B}$ base de V.*

Para demostrar el teorema anterior basta elegir un sistema generador de V y en l eliminar los vectores que sean combinación lineal del resto uno a uno. De esta forma, se construye un subconjunto del sistema generador, que sigue siendo sistema generador y que además es libre.

Por otro lado, es obvio que

Lema 3.2. *Sea V un K-espacio vectorial y $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un subconjunto K-ligado tal que $t_1 \neq 0_V$. Entonces existe $t_j \in T$ tal que t_j es K-combinación lineal de $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}$.*

Empleando este Lema se demuestra

Teorema 3.3.(Teorema del reemplazamiento) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo, $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un K-sistema generador y $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V$ un subconjunto K-libre. Entonces,*

1. *$r \leq m$.*
2. *Existe $S \subseteq T$ tal que $|S| = m - r$ y $U \cup S$ es un K-sistema generador de V.*

La clave para demostrar el Teorema del Reemplazamiento es considerar el subconjunto que se forma al ir introduciendo uno a uno los vectores de U en T (colocados por delante) y aplicar el Lema.

Del Teorema del reemplazamiento se deduce de forma inmediata:

Teorema 3.4. *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, todas las bases de V poseen en mismo cardinal.*

Teniendo en cuenta este último resultado podemos definir:

Definición. Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Se llama **dimensión** de V, y se denota por $\dim_K(V)$ al cardinal de cualquier base de V. Si $V = \{0_V\}$, se dice que su dimensión es 0 y su base es el conjunto vacío.

Existen formas sencillas de localizar una base para los espacios vectoriales de dimensión finita:

Proposición 3.5. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un K-sistema generador, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V.*

Proposición 3.6. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es K-libre, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V.*

Podemos relacionar las dimensiones de un K-espacio vectorial y la de sus subespacios:

Teorema 3.7. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n y W un K-subespacio de V. Entonces,*

1. *W es finitamente generado y $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.*
2. *Si $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base de W, entonces existen $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ tales que $\mathfrak{B}_W \cup \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V.*
3. *$W = V$ si y sólo si $\dim_K(W) = \dim_K(V)$.*

Al proceso del apartado 2. del Teorema anterior se le llama **completar la base de** W hasta obtener una base de V. Además, si consideramos el subespacio vectorial generado por $v_{r+1}, \dots, v_n$, esto es, $U =< v_{r+1}, \dots, v_n >$, resulta que $V = W \oplus U$, es decir, que U es un subespacio suplementario de W.

También podemos calcular la dimensión del subespacio vectorial suma en términos de las dimensiones de los espacios que se suman y de la intersección de éstos.

Proposición 3.8. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean U, W dos K-subespacios de V. Entonces,*

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$