2. Subespacios vectoriales.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Se dice que S es un K-**subespacio vectorial** de V, y se denota por $S \leq V$, si S con las operaciones suma y multiplicación por un escalar restringidas a S es un K-espacio vectorial.

Tenemos otras caracterizaciones equivalentes para saber si un subconjunto $S \subseteq V$ es un K-subespacio vectorial:

Proposición 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces, son equivalentes*

1. *S es un K- subespacio vectorial de V.*
2. *$\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 + s_2 \in S$ y $\forall \lambda \in K, \forall s \in S, \quad \lambda s \in S$.*
3. *$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall s_1, s_2 \in S, \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$.*

Ejemplos

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cualquier recta que pase por el $(0,0,0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $S = \{(x,y,z) | x - 2y = 0, z + y = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(2) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios en la variable x con coeficientes reales y grado menor o igual a 4, $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, el subconjunto $S = \{a + bx + ax^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

Los subespacios vectoriales son interesantes porque, entre otras propiedades, se cumple que al sumar o intersecar dos subespacios vectoriales obtenemos otro subespacio vectorial tal y como se enuncia en el siguiente resultado:

Proposición 2.2. *Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2 dos K-subespacios de V. Entonces, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_i \in S_i, i = 1, 2\}$ con la suma y la multiplicación por un escalar restringidas a ellos son K-subespacios vectoriales de V.*

A $S_1 \cap S_2$ se le llama **subespacio intersección** de S_1 y S_2 y a $S_1 + S_2$ **subespacio suma** de S_1 y S_2. Si S_1, S_2 son dos subespacios de V tales que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ y $S_1 + S_2 = V$, diremos que V se expresa como **suma directa** de los subespacios S_1 y S_2. Cuando V sea suma directa de S_1 y S_2 escribiremos $V = S_1 \oplus S_2$ y diremos que S_1 (S_2) es un subespacio suplementario de S_2 (S_1).

Del mismo modo que se ha definido la suma e intersección de dos subespacios, se puede definir la suma e intersección de un número finito de subespacios de un espacio vectorial.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S_1, $S_2, \ldots$, S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio intersección** de S_1, S_2, …, S_r a

$$\cap_{i=1}^{r} S_i = \{v \in V | v \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S_1, $S_2, \ldots$, S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio suma** de S_1, S_2, …, S_r a

$$\sum_{i=1}^{r} S_i = \{v_1 + \ldots + v_r \in V | v_i \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S_1, $S_2, \ldots$, S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se dice que V es **suma directa** de S_1, $S_2, \ldots$, S_m, y se escribe $V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

(i) $\sum_{i=1}^{m} S_i = V$.

(ii) $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$, $S_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} S_j = \{0_V\}$.