1. Definición de espacio vectorial y propiedades.

Definición. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(V, +)$ un grupo abeliano. Se dice que V es un K-**espacio vectorial**, si existe una aplicación $f : K \times V \to V$ que verifica las cuatro propiedades siguientes:

(i) $f(1_K, v) = v, \forall v \in V$

(ii) $f(\lambda_1 + \lambda_2, v) = f(\lambda_1, v) + f(\lambda_2, v), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v \in V.$

(iii) $f(\lambda, v_1 + v_2) = f(\lambda, v_1) + f(\lambda, v_2), \forall \lambda \in K, \forall v_1, v_2 \in V.$

(iv) $f(\lambda_1 \lambda_2, v) = f(\lambda_1, f(\lambda_2, v)), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v \in V.$

A esta aplicación se la denomina **multiplicación por un escalar** y se suele emplear la siguiente notación: $f(\lambda, v) = \lambda v$. A los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo K **escalares**.

Ejemplos.

(1) Se considera un cuerpo $(K, +, \cdot)$ y el grupo abeliano $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(K), +)$, siendo

$$\mathrm{Mat}_{n\times m}(K) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

y $+$ la suma usual de matrices:

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Definimos la multiplicación por un escalar siguiente:

$$\forall \lambda \in K, \forall (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Es fácil ver que esta multiplicación por un escalar cumple (i), (ii), (iii) y (iv), asi que $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

(2) Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $K^n = \{(k_1, \ldots, k_n) | k_i \in K, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Se define en K^n la siguiente operación interna:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n,\ (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y la multiplicación por un escalar:

$$\forall \lambda \in K, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n,\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Es fácil ver que K^n es un K-espacio vectorial.

(3) Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y

$$\mathbb{P}_n(K) = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n | a_i \in K,\ i \in \{0, 1, \cdots, n\}\}$$

el conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes en el cuerpo K y grado menor o igual a n. Si tomamos en $\mathbb{P}_n(K)$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall\lambda \in K$, $\forall a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{P}_n(K)$,

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \ldots + \lambda a_nx^n,$$

resulta que $(\mathbb{P}_n(K), +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

De la propia definición de espacio vectorial se deducen algunas propiedades:

Proposición 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces,*

1. $\lambda 0_V = 0_V$, $\forall\lambda \in K$.
2. $0_K v = 0_V$, $\forall v \in V$.
3. $(-1_K)v = -v$, $\forall v \in V$.
4. *Si $\lambda \in K$ y $v \in V$ verifican que $\lambda v = 0_V$, entonces $\lambda = 0_K$ ó $v = 0_V$.*