5. Estructuras algebraicas básicas.

Dependiendo de las propiedades que verifique una operación interna, al sistema algebraico $(A,*)$ le daremos distintos nombres:

Definición. Sea $(A,*)$ un sistema algebraico. Se dice que $(A,*)$ es un **semigrupo** si $*$ verifica la propiedad asociativa.

Un semigrupo $(A,*)$ se dice que es **conmutativo**, si $*$ es conmutativa.

Un semigrupo $(A,*)$ se dice que es **monoide** si $*$ tiene elemento neutro.

Un monoide $(A,*)$ se dice que es un **grupo**, si todo elemento de A es inversible, esto es si $*$ verifica la existencia de elemento inverso.

Un grupo $(A,*)$ se dice que es **abeliano**, si $*$ es conmutativa.

Ejemplos

1. $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{Q},+)$ son grupos abelianos.

2. $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$ y $(\mathbb{R},\cdot)$ son monoides pero no grupos ya que no todo elemento de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ tiene inverso en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$, respectivamente.

3. Sea $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el conjunto formado por las matrices de orden 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$, esto es,
$$Mat_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$
En este conjunto definimos las dos operaciones siguientes: $+$ y $\cdot$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$
Es fácil probar que $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),+)$ es un grupo abeliano y que $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\cdot)$ es un monoide. De forma análoga se pueden definir operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ conjunto formado por las matrices de orden n por n.

Definición. Sea $(R,+,\cdot)$ un sistema algebraico. Se dice que $(R,+,\cdot)$ es un **anillo** si se verifican las siguientes condiciones:

i) $(R,+)$ es un grupo abeliano.

ii) $(R, \cdot)$ es un semigrupo.

iii) Propiedades distributivas:

$$\begin{array}{c} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in R \\ (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall x, y, z \in R \end{array}.$$

Definición. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Se dice que es **conmutativo** cuando $\cdot$ es conmutativa.

Definición. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Se dice que es un **anillo con identidad** ó **unitario**, si $\cdot$ posee elemento neutro. Al elemento neutro para $\cdot$ se le llama **elemento identidad**.

Ejemplos

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ son anillos unitarios conmutativos.
2. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ no es un anillo porque, $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo.
3. Sea $R = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, con las operaciones suma y producto usuales. Entonces, $(R, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
4. $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un anillo unitario.

Definición. Sea $(R, +, \cdot)$ un sistema algebraico. Se dice que $(R, +, \cdot)$ es un **cuerpo** si se verifican las siguientes propiedades:

i) $(R, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

ii) Todos los elementos de $R - \{0\}$ son inversibles para $\cdot$.

Ejemplos

1. $(\mathbb{Z}, +, .)$ no es un cuerpo porque no todos los elementos de $\mathbb{Z} - \{0\}$ son inversibles.
2. $(\mathbb{R}, +, .)$ es un cuerpo.
3. $(Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ no es un cuerpo ya que la operación $\cdot$ no es conmutativa y además no todos los elementos de $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tienen inverso.