## 4. Leyes de composición internas.

**Definición.** Sea $A$ un conjunto no vacío. Una **ley de composición interna sobre** $A$, o una **operación (interna)** de $A$ es una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \to & f(a,b). \end{array}$$

**Nota**: Generalemente, en lugar de escribir $f(a,b)$, escribiremos el resultado de la operación del siguiente modo: $a*b, a\ o\ b, a\cdot b, ...$ y a la operación la denominaremos por el símbolo utilizado: $*, o, \cdot, ...$

**Definición.** Un **sistema algebraico** es un conjunto $A$ no vacío con una o varias operaciones internas sobre él.

**Ejemplos**

1. Sea $A=\{0,1\}$. En $A$ podemos definir dos operaciones: $*$ y $\circ$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll} 0*0=0 & 0\circ 0=0 \\ 0*1=0 & 0\circ 1=1 \\ 1*0=0 & 1\circ 0=1 \\ 1*1=1 & 1\circ 1=0 \end{array}$$

Como se observa, en un conjunto se pueden definir más de una operación.

2. Sea $A=\mathbb{Z}$. Definimos

$$a*b=\sqrt{a\cdot b}, \forall a,b\in\mathbb{Z},$$

no es una operación de $\mathbb{Z}$ porque $\sqrt{a\cdot b}$ no pertenece siempre a $\mathbb{Z}$. En cambio,

$$a*b=-2, \forall a,b\in\mathbb{Z},$$

sí es una operación de $\mathbb{Z}$.

3. Sea $A=\mathbb{N}$. Entonces, $a*b=a^b, \forall a,b\in A$, es una operación en $\mathbb{N}$ pero si tomamos $A=\mathbb{Z}$, no lo es.

4. Sea $\mathbb{F}=\{f:A\to B \mid f \text{ aplicación}\}$.

   a) $f+g$, donde $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in\mathbb{F}$, suma usual de funciones, es una operación en $\mathbb{F}$.

   b) $f\cdot g$, donde $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in\mathbb{F}$, producto usual de funciones, es una operación en $\mathbb{F}$.

c) Si $A = B$, entonces $f \circ g$, donde $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathbb{F}$, composición usual de funciones, es una operación en $\mathbb{F}$.

5. Sea $A$ un conjunto y $\mathfrak{P}(A)$ su booleano. Entonces, la unión, intersección y diferencia de dos elementos de $\mathfrak{P}(A)$ son operaciones de $\mathfrak{P}(A)$.

Sea $(A, *)$ un sistema algebraico. Entonces, $*$ puede verificar las siguientes propiedades:

(i) **Asociativa**: $\forall a, b, c \in A$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(ii) **Conmutativa**: $\forall a, b \in A$, $a * b = b * a$.

(iii) **Existencia de elemento neutro o identidad**: $\exists e \in A$ tal que $\forall a \in A$, $a * e = a = e * a$.

(iv) **Existencia de elemento opuesto o inverso**: $\forall a \in A$, $\exists a' \in A$, tal que $a * a' = e = a' * a$, donde $e$ es el elemento neutro de $*$.

Normalmente, se suele denotar el inverso de $a$ por $a^{-1}$, si la operación es denotada por $\cdot$ y por $-a$, si la operación es denotada por $+$. También se suele denotar por 1 el elemento neutro, si es que hay, cuando la operación se denota por $\cdot$ y por 0, si la operación es denotada por $+$.

**Definición.** Sean $(A, *)$ un sistema algebraico y $a \in A$. Se dice que $a$ es **inversible** si $a$ tiene elemento inverso.

**Ejemplos**

1) En $(\mathbb{R}, +)$, donde $+$ denota la suma de números reales, se verifican las propiedades asociativa y conmutativa, el número 0 es el elemento neutro y cada $x \in \mathbb{R}$ tiene inverso: $-x$.

2) En $(\mathbb{R}, .)$, donde . denota el producto de números reales, se verifican las propiedades asociativa y conmutativa, el número 1 es el elemento neutro y cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tiene inverso: $\frac{1}{x}$. Pero $\cdot$ no verifica la propiedad de "existencia de elemento inverso" porque el 0 no tiene inverso para esta operación.

Observamos que si $*$ una operación asociativa en $A$, entonces para $a_1, ..., a_n \in A$ arbitrarios todas las expresiones que resultan de intercalar paréntesis en $a_1 * ... * a_n$ dan el mismo valor. Esto es, si $*$ es asociativa podemos intercalar paréntesis donde queramos sin que se altere el resultado. Por este motivo, denotaremos al resultado de estas expresiones por $a_1 * ... * a_n$.

Es fácil demostrar

**Teorema 4.1.** *Sea $(A, *)$ un sistema algebraico. Si existe un elemento neutro, entonces éste es único.*

**Teorema 4.2.** *Sea $(A, *)$ un sistema algebraico con elemento neutro $e$. Si $*$ es asociativa y $a \in A$ es inversible, entonces el elemento inverso de $a$ es único.*

Destacamos que el resultado anterior deja de ser cierto si $*$ no es asociativa. Por ejemplo, si consideremos la siguiente operación en $\mathbb{R}$:

$$x * y = x^2y^2 + x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

resulta que $*$ es una operación conmutativa con elemento neutro el 0. Si tomamos ahora el elemento $x = -1$, se sigue que $x' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$ son elementos inversos de $x = -1$.