3. Relaciones de equivalencia.

Definición. Sea A un conjunto. Una **relación binaria** $\sim$ definida sobre A es una regla que nos indica si dados dos elementos a y b pertenecientes a A están o no relacionados.

Si $\sim$ es una relación definida sobre A y $a, b \in A$ están relacionados, entonces escribiremos $a \sim b$. En caso contrario, aparecerá $a \not\sim b$.

Definición. Sea A un conjunto. Una **relación de equivalencia** definida en A es una relación binaria de A que verifica las tres propiedades siguientes:

i) Reflexiva: $a \sim a \quad \forall a \in A$.

ii) Simétrica: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \quad a, b \in A$.

iii) Transitiva: $a \sim b \quad y \quad b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad a, b, c \in A$.

Ejemplos

1. En un conjunto A definimos la relación:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow a = b.$$

   Fácilmente se comprueba que es de equivalencia.

2. En $A = \mathbb{Z}$ se define la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ es un número par.}$$

   Claramente, $\sim$ es una relación de equivalencia.

3. En $A = \mathbb{Z}$ se define la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a < b.$$

   La relación binaria anterior no es de equivalencia porque no se cumple la propiedad simétrica ni la propiedad reflexiva.

4. En $A = \mathbb{Z}$ se define la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \geq b.$$

   La relación binaria anterior no es de equivalencia porque no se cumple la propiedad simétrica.

Definición. Sean A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Para cada $a \in A$ se llama **clase de equivalencia de** a, y se denotará por $\overline{a}$ o por $[a]$, al siguiente conjunto:

$$\overline{a} = [a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Como se observa, $\overline{a}$ es un subconjunto no vacío de A ya que $a \in \overline{a}$.

Es fácil demostrar que:

Teorema 3.1. *Sea A un conjunto, $a, b \in A$ y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Entonces, la intersección de dos clases de equivalencia es no vacía si y sólo si ambas clases coinciden, esto es,*

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longleftrightarrow [a] = [b].$$

Definición. Sea A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Un **sistema completo de representantes de la relación** $\sim$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que cualquier elemento de A está relacionado con exactamente un elemento de X.

Dado un conjunto A y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A, al conjunto $A/\sim$ formado por las clases de equivalencia se le llama **conjunto cociente**, esto es

$$A/\sim = \overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Claramente, al unir todas las clases de equivalencia se obtiene A. Por consiguiente, de esta observación y del teorema anterior deducimos:

Teorema 3.2. *Sea A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia definida en A. Entonces, el conjunto cociente $\overline{A}$ es una partición de A.*

Ejemplos

1. Si definimos en una conjunto A la relación $\sim$ mediante $\forall a, b \in A$, $a \sim b$ si y sólo si $a = b$, se verifica que

   $$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\} = \{b \in A \mid a = b\} = \{a\}$$

   y que

   $$A/\sim = \overline{A} = \{\{a\} \mid a \in A\} = A.$$

2. En $A = \mathbb{Z}$ definimos la relación $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ si y sólo si $a - b$ es un número par. Entonces, si a es un número par,

   $$\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid a - x \text{ es par}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par}\} = \overline{2} = \overline{4} = \ldots.$$

En cambio, si $b \in \mathbb{Z}$ es impar,

$$\overline{b} = \{x \in \mathbb{Z} \mid b - x \text{ es par}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es impar}\} = \overline{1} = \overline{3} = ...$$

Por consiguiente, el conjunto cociente sólo tiene dos clases de equivalencia distintas y viene dado por

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\overline{1}, \overline{2}\}.$$

Un sistema completo de representantes de esta relación estará formado por dos números enteros tales que uno es par y el otro es impar. Por ejemplo, son sistemas completos de representantes los conjuntos $\{1, 2\}$, $\{0, -7\}$, ó $\{-4, -57\}$ pero no es sistema completo de representantes los conjuntos $\{1, -5\}$, $\{-4, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$ ó $\{1\}$.

3. Sea $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Definimos en A la siguiente relación:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x_1 = \lambda x_2 \text{ y } y_1 = \lambda y_2$$

Es inmediato comprobar que la relación anterior es de equivalencia. Además, si $(x_1, y_1) \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{(x_1, y_1)} &= \{(x_2, y_2) \mid (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)\} \\ &= \{(x_2, y_2) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } x_2 = \lambda x_1 \quad \wedge \quad y_2 = \lambda y_1\} \\ &= \{(\lambda x_1, \lambda y_1) \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}.\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\overline{(1, 0)} = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$. Esto es, la clase de equivalencia del elemento (x_1, y_1) es el conjunto de puntos de A que se encuentran sobre la recta que pasa por (x_1, y_1) y el origen $(0, 0)$. Obviamente, el $(0, 0)$ no está en la clase de equivalencia del elemento (x_1, y_1) porque no pertenece al conjunto A. Por consiguiente, el conjunto cociente estará definido por

$$= \{\overline{(x, y)} | (x, y) \in A\},$$

esto es el conjunto formado por las rectas que pasan por el origen (quitando el origen). A este conjunto cociente se le suele denotar por $hbox\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ y se le llama el **espacio proyectivo de dimensión 1**.