2. Aplicaciones.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Una **aplicación** ó **función** de A en B es una regla que a cada $a \in A$ le hace corresponder un único elemento de B.

Normalmente, se suele denotar una aplicación de A en B por $f : A \to B$. En tal caso, a A se le llama **dominio** de la aplicación y a B **codominio** ó **conjunto final**.

Si $a \in A$ y $f : A \to B$ es una aplicación, se denota por $f(a)$ el elemento de B que le hace corresponder la aplicación f al elemento a. A $f(a)$ se le llama **imagen de** a por la aplicación f.

Ejemplos

1. **Aplicación identidad**: Si A es un conjunto, se define la aplicación identidad mediante:
$$\begin{array}{rccc} 1_A : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \to & 1_A(a) = a. \end{array}$$
A veces denotaremos la aplicación identidad por id_A.

2. **Aplicación inclusión**. Si $A \subseteq B$, se define la aplicación inclusión de la manera que sigue:
$$\begin{array}{rccc} i_A : & A & \longrightarrow & B \\ & a & \to & i_A(a) = a. \end{array}$$
Como se observa, si $A = B$, entonces la aplicación inclusión coincide con la aplicación identidad.

3. **Aplicación constante**. Si A y B son dos conjuntos y $b_0 \in B$ un elemento fijo de B, entonces:
$$\begin{array}{rccc} c_{b_0} : & A & \longrightarrow & B \\ & a & \to & c_{b_0}(a) = b_0. \end{array}$$

4. Sean $S \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Se llama **restricción** de f a S a la siguiente aplicación:
$$\begin{array}{rccc} f_{|S} : & S & \longrightarrow & B \\ & s & \to & f_{|S}(s) = f(s). \end{array}$$

5. Sean $S \subseteq A$ y $f : S \longrightarrow B$ una aplicación. Se llama **extensión** de f a A a la cualquier aplicación $g : A \longrightarrow B$ tal que $g_{|S} = f$.

6. Sean $A_1, ..., A_k$ conjuntos no vacíos. Consideremos su producto cartesiano $A_1 \times ... \times A_k$, que será también no vacío. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, la **proyección** i**-ésima** es la aplicación denotada por p_i que está definida de la manera siguiente:
$$\begin{array}{rccc} p_i : & A_1 \times ... \times A_k & \longrightarrow & A_i, \\ & (a_1, ..., a_k) & \to & p_i((a_1, ..., a_k)) = a_i. \end{array}$$

Definición. Sean $f : A \to B$ una aplicación y $S \subseteq A$. Entonces, la **imagen del subconjunto** S, que denotaremos por $f(S)$, es el subconjunto de B cuyos elementos son imágenes de elementos de S, esto es,

$$f(S) = \{f(a) | \ a \in S\}.$$

Observar que si $f : A \to B$ una aplicación, se puede tomar como subconjunto S de A el propio A. En tal caso, $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ recibe el nombre de **imagen** de A por la aplicación f. A veces, también se suele denotar la imagen de A por la aplicación f mediante Imf.

Si $f : A \to B$ es una aplicación de A en B y $b \in B$, entonces se llama **antiimagen** de b a un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. De la definición de aplicación, se deduce que si $f : A \to B$ es una aplicación, entonces cada elemento de A tiene una única imagen, pero no todo elemento de B tiene que tener antiimagen e incluso un mismo elemento de B puede tener más de una antiimagen. Por ello, en lo que sigue,

$$f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

A veces, para simplificar notación, escribiremos $f^{-1}(b)$ en vez de $f^{-1}(\{b\})$.

Del mismo modo, si $f : A \to B$ es una aplicación y $T \subseteq B$, el subconjunto de A formado por las antiimagenes de los elementos de T se denota por

$$f^{-1}(T) = \{a \in A | f(a) \in T\}$$

y se llama **imagen inversa del subconjunto** T. Obviamente, puede suceder que $f^{-1}(T) = \emptyset$.

Ejemplos

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x) = x^2$. Si tomamos como subconjunto de $\mathbb{R}$, $S = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $f(S) = \{0, 1, 4\}$. Fácilmente se comprueba que la imagen inversa de $T = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$ es vacía, esto es, $f^{-1}(T) = \emptyset$. En cambio, si se elige $T = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(T) = \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. En el ejemplo anterior, $Imf = \{f(a) \ \mid \ a \in A\} = \{a^2 \ \mid \ a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Definición. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos aplicaciones. Se dice que f y g son **iguales** cuando $A = C$, $B = D$ y $f(a) = g(a) \ \ \forall a \in A$.

Definición. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** si dados dos elementos cualesquiera distintos de A sus imágenes son diferentes. Es decir,

$$\forall a, a' \in A, \ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Equivalentemente, podemos expresar la condición de ser inyectiva mediante

$$\forall a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Definición. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es **suprayectiva** si $f(A) = B$. Esto es,

$$\forall b \in B \ \ \exists a \in A \ \mid \ f(a) = b.$$

Definición. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se llama **biyectiva** si es suprayectiva e inyectiva. Esto es,

$$\forall b \in B \ \ \exists! a \in A \ \mid \ f(a) = b.$$

Ejemplos

1. Sea
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \rightarrow & x^2. \end{array}$$
Claramente, la aplicación anterior es suprayectiva y no es inyectiva.

2. Sea
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \rightarrow & 2n. \end{array}$$
La aplicación anterior es inyectiva pero no suprayectiva.

3. Para cualquier conjunto A la aplicación identidad 1_A es biyectiva.

Definición. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ dos aplicaciones tales que $B \subseteq C$. Llamamos **composición de** f **y** g, a la aplicación denotada por $g \circ f$ y definida mediante

$$\begin{array}{cccc} g \circ f: & A & \longrightarrow & D \\ & a & \rightarrow & g(f(a)) \end{array}$$

Esto es, $(g \circ f)(a) = g(f(a)), \ \ \forall a \in A$.

Ejemplo

1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones definidas por $f(x) = x^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x + 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, $(g \circ f)(x) = x^2 + 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

   Como se puede observar en el ejemplo anterior, en general, $f \circ g$ no coincide con $g \circ f$.

Definición. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectiva. Se llama **función inversa de** f, y se denota por f^{-1}, a la aplicación $f^{-1} : B \longrightarrow A$ definida por

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Ejemplo

1. Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \to & x^2 \end{array}$$

La función f es biyectiva y su función inversa es:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \to & \sqrt{x} \end{array}$$

A pesar de utilizar la misma notación, no se debe confundir la antiimagen de un elemento b (que es un subconjunto de A cuyos elementos tienen por imagen a b) con la imagen del elemento b por la aplicación f^{-1}. La primera se puede calcular simepre y la segunda sólo si f es biyectiva. Es fácil demostrar que

Proposición 2.1. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectiva. Entonces,*

i) $f \circ f^{-1} = 1_B$

ii) $f^{-1} \circ f = 1_A$

iii) f^{-1} *es biyectiva y* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposición 2.2. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectiva y sea $g : B \longrightarrow A$. Entonces son equivalentes:*

(i) $g = f^{-1}$.

(ii) $f \circ g = 1_B$ *y* $g \circ f = 1_A$.