1. Nociones básicas de la Teoría de Conjuntos.

Definición. Un **conjunto** es una colección de objetos. A los objetos de un conjunto se les llama **elementos** del conjunto.

Se denominará **conjunto vacío** al conjunto que no tiene elementos y se denotará por $\emptyset$.

Normalmente, emplearemos letras mayúsculas (A, B, $\ldots$) para denotar los conjuntos y usaremos letras minúsculas (a, b, c, $\ldots$) para los elementos de un conjunto. Para indicar que un elemento a está en un conjunto A escribiremos $a \in A$, que se lee "*a pertenece a A*". En caso contrario escribiremos $a \notin A$, que se lee "*a no pertenece a A*".

Existen dos formas de definir un conjunto:

i) **Por extensión**: En este caso se indican todos elementos que forman el conjunto escritos entre los símbolos { y } y separados por ",". Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ significa que el conjunto A está formado por los elementos 1, 2 y 3.

ii) **Por comprensión**: Se señalan la(s) propiedad(es) que caracteriza(n) los elementos del conjunto. En este caso escribiremos el conjunto de la siguiente manera: $\{x \mid p(x)\}$, donde $p(x)$ es la propiedad que debe verificar el elemento x para pertenecer al conjunto. Por ejemplo, $B = \{x \mid x \text{ es un número natural y } x \leq 3\}$ (observar que el conjunto B coincide con el conjunto A del apartado i)).

Si A y B son dos conjuntos tales que cada elemento de B pertenece a A, se dice que B está contenido en A y se escribe $B \subseteq A$ (ó $B \subset A$). Es decir,

$$B \subseteq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall b \in B, b \in A.$$

En caso contrario, esto es, si existe al menos un elemento de B que no está en A, se dice que B no está contenido en A y se expresa mediante $B \nsubseteq A$ (ó $B \not\subset A$). Esto es,

$$B \nsubseteq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists b \in B \text{ tal que } b \notin A.$$

Si B es un conjunto tal que $B \subseteq A$, se dice que B es un **subconjunto** de A.

Si $B \subseteq A$ y $B \neq A$, escribiremos $B \underset{\neq}{\subset} A$, cuando queramos destacar que $B \neq A$ y se dirá que B es un **subconjunto propio** de A. Es evidente que

$$B \underset{\neq}{\subset} A \Longleftrightarrow \forall b \in B, b \in A \text{ y } \exists a \in A \text{ tal que } a \notin B.$$

Ejemplos.

1. $\emptyset$, que representa el **conjunto vacío**, está contenido en cualquier conjunto A.
2. Si A es un conjunto, entonces $A \subseteq A$.
3. Sean $A = \{1, -1, -3, 5\}$ y $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ es un número entero}\}$. Entonces, $A \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z}$.
4. Sean $A = \{1, 2, 3, -\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ y $B = \mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$. Entonces, $A \not\subset B$.
5. Si $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, se tiene $\mathbb{N} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q}$.
6. Si $A = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ es primo}\}$ denota el conjunto de los números primos y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, se tiene $A \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z}$.

Definición. Sea A un conjunto. Se llama **conjunto de las partes de** A ó **booleano** de A, y se denota por $\mathfrak{P}(A)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A (incluyendo el conjunto vacío y el propio A), esto es,

$$\mathfrak{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}.$$

Definición. Sea A un conjunto. Se llama **cardinal de** A al número de elementos de A. Normalmente, se suele denotar el cardinal de A por $|A|$ ó por $\#A$.

Definición. Un conjunto A se dice que es **finito** si tiene un número finito de elementos, esto si, si $|A| < \infty$.

Para denotar una **familia de conjuntos** indicada por I escribiremos $\{A_i \mid i \in I\}$ o $\{A_i\}_{i \in I}$ donde I es un conjunto de índices no vacío.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. La **intersección** de los conjuntos A y B es el conjunto denotado por $A \cap B$ formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B, esto es,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \in B\}.$$

Cuando $A \cap B = \emptyset$, se suele decir que los conjuntos A y B son **disjuntos**.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos, la intersección de ellos es un conjunto denotado por $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ y cuyos elementos son:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \forall i \in I\}.$$

Diremos que la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es **disjunta** cuando se verifique la siguiente condición:

$$\forall i,j\in I,\ i\neq j,\quad A_i\cap A_j=\emptyset.$$

Definición. Sean A y B dos conjuntos. La **unión** de los conjuntos A y B, denotado por $A\cup B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A ó a B, esto es,

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\ \vee x\in B\}.$$

Si A y B son disjuntos, se dirá que la unión de A y B es disjunta y se denotará por $A\dot{\cup} B$.

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, la unión de ellos se denota por $\bigcup_{i\in I} A_i$ y tiene por elementos:

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid \exists i\in I \text{ tal que } x\in A_i\}.$$

Al igual que antes, si la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es disjunta, diremos que la unión de ella es disjunta y lo denotaremos por $\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i$.

Ejemplos

1. Consideremos la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $A_n=[n,n+1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}=[1,+\infty).$$

   Además, la familia anterior es disjunta ya que $A_n\cap A_m=\emptyset$ si $n\neq m$.

2. Consideremos la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $A_n=(n,n+1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}=(1,+\infty)-\mathbb{N}.$$

   Además, la familia anterior es disjunta ya que $A_n\cap A_m=\emptyset$ si $n\neq m$.

3. Consideremos la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $A_n=[n,n+1]$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}=[1,+\infty).$$

   Además, la familia anterior no es disjunta ya que para cada $n\in\mathbb{N}$, $A_n\cap A_{n+1}=\{n+1\}$.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Se llama **diferencia** de los conjuntos A y B, y se denota por $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, esto es,

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Se llama **producto cartesiano** de los conjuntos A y B, y se denota $A \times B$, al conjunto formado por todos los pares (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

En relación al producto cartesiano destacamos:

1.- El par (a, b) es un par ordenado, esto es, siempre se debe verificarse que $a \in A$ y $b \in B$.

2.- Si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, entonces $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

3.- Si $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces $|A \times B| = n \times m$.

4.- Si $A \neq B$, entonces $A \times B \neq B \times A$.

Del mismo modo que hemos definido el producto cartesiano de dos conjuntos, podemos definir el producto cartesiano de k conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ de la manera siguiente:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots k\}, \ a_i \in A_i\}.$$

Definición. Sean A un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia disjunta de subconjuntos de A. Diremos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **partición** de A si $A = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} A_i$.

Ejemplo

1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ es una partición de A.