Problemas y Ejercicios Propuestos.

Tema 6: Diagonalizacion.

1.- Sea $f \in \text{End}\, V$. Demostrar que la imagen de un subespacio f-invariante también es f-invariante.

2.- Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Probar que $A \in GL_n(K)$ si y sólo si el cero no es valor propio de A.

3.- Calcular los valores propios reales y los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 5 & -8 \\ -4 & -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$. ¿Es A diagonalizable?

4.- Se considera una matriz A tal que $\chi_a(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)(x-2)$ ¿Qué se puede decir sobre la diagonalización A en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$?

5.- Si $\lambda \in \mathbb{C}$, probar que la matriz $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ no es diagonalizable. Generalizar a la matriz $n \times n$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Problemas

1.- Sea $f \in \text{End}\, \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada, empleando la notación por filas, respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que el subespacio $W = \langle (1,1,3,-1), (0,1,5,-3) \rangle$ es f-invariante.

(ii) Calcular la matriz asociada a $f_{|W}$ respecto de la base $\mathfrak{B}_W = \{(1,1,3,-1), (0,1,5,-3)\}$. Demostrar que $f_{|W}$ es diagonalizable y encontrar una base de W respecto de la cual su matriz asociada sea diagonal.

(iii) Obtener un subespacio f-invariante W' tal que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$. (Ayuda. Elegir algún subespacio generado por vectores propios.)

2.- Estudiar si A es semejante a B, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sean, localizar una matriz de paso $B = PAP^{-1}$.

3.- Sea $f \in \text{End}\ (\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo definido por $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$

(i) Demostrar que f es diagonalizale y hallar una base $\mathfrak{B}$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

(ii) Calcular $f^{10}(1, -1, 1)$ y encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f^{10}(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

(iii) Localizar $g \in \text{End}\ (\mathbb{R}^3)$ tal que $g^2 = f$.

4.- Se considera la matriz $A_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$, donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(i) Hallar sus valores y vectores propios.

(ii) Localizar los valores de a para los cuales A_a es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Cuando lo sea, hallar su forma diagonal y una matriz de paso.

5.- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f \in \text{End}\ V$ tal que $f^2 = 1_V$.

(i) Probar que los únicos valores propios posibles de f son 1 y -1.

(ii) Demostrar que f es diagonalizable. (Ayuda. Probar que $V = V(1) \oplus V(-1)$. Si $v \in V$, debemos encontrar $u \in V(1)$ y $w \in V(-1)$ tales que $v = u + w$. Si queremos saber cómo hay que tomar u y w, podemos suponer por un momento que ya se tiene $v = u + w$. Aplicando f a esta expresión, se obtiene otra relación entre u y w. De estas dos expresiones con u y w se pueden despejar sus valores.)

(iii) Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, deducir que $A^2 = I_n$ si y sólo si A es similar a una matriz diagonal con valores 1 o -1 en la diagonal.