Problemas y Ejercicios Resueltos.
Tema 6: Diagonalizacion.

Ejercicios

1.- *Sea $f \in \text{End } V$. Demostrar que la suma de subespacios f-invariantes es f-invariante.*

Solución. Sean U, W dos subespacios f-invariantes de V. Entonces, por definición de f-invariantes, se cumple

$$f(U) \subseteq U \tag{1}$$

y

$$f(W) \subseteq W. \tag{2}$$

Ahora, $U + W$ es subespacio de V, por ser suma de subespacios, y $f(U + W) = f(U) + f(W)$, por ser f lineal y de (1) y (2) concluimos:

$$f(U + W) = f(U) + f(W) \subseteq U + W,$$

o sea, $U + W$ es también f-invariante.

2.- *Calcular los valores propios reales λ y los subespacios fundamentales $V(\lambda)$ para $f \in \text{End } (\mathbb{R}^3)$ definido por $f((x, y, z)) = (-x - z, -7x + 4y + 13z, x - 3z)$.*

Solución. Sabemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico y éste viene dado por el polinomio característico de cualquier matriz asociada a f. Empleando la notación por filas, si elegimos la matriz asociada a f respecto de la base canónica, ésta viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico de esta matriz es

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 7 & -1 \\ 0 & x-4 & 0 \\ 1 & -13 & x+3 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2.$$

Por tanto, los valores propios de f son 4 y -2.

Calculamos los subespacios fundamentales

$$\begin{aligned}
V(4) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 4(x,y,z)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (-x-z, -7x+4y+13z, x-3z) = 4(x,y,z)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | 5x+z=0, -7x+13z=0, x-7z=0\}\\
&= \{(0,y,0)\in\mathbb{R} | y\in\mathbb{R}\}\\
V(-2) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = -2(x,y,z)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x-z=0, -7x+6y+13z=0\}\\
&= \{(x,-x,x) | x\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

3.- *Sea A una matriz diagonalizable con forma diagonal D y matriz de paso P. Demostrar que A^n es diagonalizable con forma diagonal D^n. Deducir cuánto vale A^n.*

Solución. Si A es diagonalizable con forma diagonal D y matriz de paso P significa que $A = PDP^{-1}$, luego $A^n = PD^n p^{-1}$ y, por tanto, A^n es diagonalizable con forma diagonal D^n.

4.- *Probar que, si A es diagonalizable y A semejante a B, entonces B es también diagonalizable.*

Solución. Si A es diagonalizable, entonces existe D matriz diagonal y P matriz de paso tal que

$$A = PDP^{-1}. \tag{1}$$

Por otro lado, si A semejante a B, entonces existe Q matriz de paso tal que

$$A = QBQ^{-1}. \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \Longrightarrow B = Q^{-1}PDP^{-1}Q.$$

Pero $T = Q^{-1}P$ es una matriz inversible (por ser el producto de dos matrices inversibles) tal que $B = TDT^{-1}$, asi que B es diagonalizable con forma diagonal D.

5.- *Estudiar si* $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$. En caso afirmativo, determinar su forma diagonal y una matriz de paso.*

Solución. Sabemos que $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(i) Existen $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $\dim(V_A(\lambda)) = m(\lambda)$. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ su polinomio característico viene dado por

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 7 & -1 \\ 0 & x-4 & 0 \\ 1 & -13 & x+3 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2,$$

luego se escinde sobre $\mathbb{R}$ y se cumple (i). Pero,

$$\begin{aligned} V_A(-2) &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | (x\ y\ z)A = -2(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | x - z = 0, -7x + 6y + 13z = 0\} \\ &= \{(x\ \ -x\ x) | x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Así que $\dim(V_A(-2)) = 1 < 2 = m(-2)$ y A no es diagonalizable.

El polinomio característico de B es

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2$$

Ahora,

$$\begin{aligned} V_B(-2) &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | (x\ y\ z)B = -2(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\} \\ &= \{(x\ \ -x-2z\ z) \in \mathbb{R}^3 | x, z \in \mathbb{R}\} = <(1\ \ -1\ 0), (0\ \ -2\ 1)> \Longrightarrow \dim(V_B(-2)) = 2 = m(-2). \\ V_B(4) &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | (x\ y\ z)B = 4(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 | -3x + 3y + 6z = 0, -3x - 9y - 6z = 0, 3x + 3y = 0\} \\ &= \{(x\ \ -x\ x) | x \in \mathbb{R}\} = <(1\ \ -1\ 1)> \Longrightarrow \dim(V_B(4)) = 1 = m(4). \end{aligned}$$

Por tanto, B cumple también la condición (ii) y es diagonalizable con forma diagonal $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Para construir la matriz de paso debemos tomar de cada subespacio fundamental una base y se colocarán en la matriz P en el mismo orden que aparezcan los valores propios. Así, para calcular la matriz de paso P debemos colocar en las dos primeras filas una base de $V_B(-2)$ y en la tercera fila una base de $V_B(4)$. Por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y se cumple $D = PBP^{-1}$.

Nota: En la definición de $V_A(\lambda)$ nos han fijado la notación a emplear: es la notación por filas. Esto fuerza a que en la definición de P empleemos también la notación por filas. Si se hubiera definido $V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ estaríamos usando la notación por columnas y en caso de ser A diagonalizable P llevaría en sus columnas bases de los subespacios fundamentales asociados a los valores propios.

Problemas

1.- *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $f(x, y, z) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y)$.*

(i) Demostrar que f es diagonalizable y encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

(ii) Estudiar si las siguientes matrices están asociadas a f y, en caso afirmativo, hallar una base respecto de la cual lo estén: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución. (i) Para probar que f es diagonalizable, empleamos la caracterización de endomorfismos diagonalizables:

"$f : V \to V$ lineal es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(i) Su polinomio característico se escinde sobre K, esto es, existen $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(ii) Para cada valor propio λ, se verifica $dim(V(\lambda)) = m(\lambda)$. "

Para calcular supolinomio característico, debemos buscar una matriz A asociada a f y calcular el polinomio característico de A. Por ejemplo, si tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a f, empleando notación por filasm viene dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es

$$\chi(x) = \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 2 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)^2,$$

Calculamos los subespacios fundamentales asociados a los valores propios:

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 2(x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,-x+y) | x,y \in \mathbb{R}\} \\ V(3) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 3(x,y,z)\} \\ &= \{(x,-2x,-2x) | x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Luego, f es diagonalizable y una base respecto de la cual la matriz asociada estará formada por vectores porpios linelamente independientes. Por ejemplo, podemos tomar $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-2,-2)\}$.

(ii) Es fácil ver que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable porque $V_B(2)$ es de dimensión 1 y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es precisamente la forma diagonal de f. Por tanto, C es matriz asociada a f y una base respecto de la cual lo es viene dada por $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-2,-2)\}$.

2.- *Estudiar si A es semejante a B, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 2 & 4 & \frac{5}{3} \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sean, localizar una matriz de paso $B = PAP^{-1}$.*

Solución. Sabemos que dos matrices diagonalizables A y B son semejantes si tienen el mismo polinomio característico. Así que vamos a estudiar si las matrices A y B son diagonalizables y si tienen el mismo polinomio característico.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+3).$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & \frac{5}{3} \\ -2 & x-4 & -\frac{5}{3} \\ 5 & 5 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+3).$$

Por tanto, ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. Veamos si son diagonalizables:

1. Para A tenemos

$$\begin{aligned} V_A(2) &= \{(x\ y\ z) | (x\ y\ z)A = 2(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) | z = 0 = 5z\} \\ &= \{(x\ y\ 0) | x, y \in \mathbb{R}\} = <(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0)> \\ V_A(-3) &= \{(x\ y\ z) | (x\ y\ z)A = -3(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) | 5y - z = 0 = 5x\} \\ &= \{(0\ y\ 5y) | y \in \mathbb{R}\} = <(0\ 1\ 5)> . \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es la forma diagonal de A y $D = P_1 A P_1^{-1}$, siendo $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Para B tenemos

$$\begin{aligned} V_B(2) &= \{(x\ y\ z) | (x\ y\ z)B = 2(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) | 2y - 5z - 2x = 0 = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y - 5z\} \\ &= \{(x\ x\ 0) | x, z \in \mathbb{R}\} = <(1\ 1\ 0)> \end{aligned}$$

Por tanto, B no es diagonalizable, ya que $\dim(V_B(2)) = 1 < 2 = m(2)$.

Por consiguiente, A no es semejante a B, porque como A es diagonalizable toda matriz semejante a A es también diagonalizable con su misma forma diagonal.

3.- *¿Qué debe verificar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Cuando lo sea, hallar su forma diagonal, una matriz de paso y A^n para cualquier número natural n.*

Solución. Una condición necesaria, aunque no suficiente, para que A sea diagonalizable es que se escinda su polinomio característico. Ahora,

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -a & -a \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$$

Además, debemos pedir que $\dim(V_A(1)) = 2$ y $\dim(V_A(2)) = 1$. Pero, $\dim(V_A(2)) = 1$ se cumple ya que al ser 2 valor propio sabemos que $1 \leq \dim(V_A(2)) \leq m(2) = 1$. Por consiguiente sólo queda calcular los valores de a para los cuáles $\dim(V_A(1)) = 2$. Ahora,

$$\begin{aligned} V_A(1) &= \{(x\ y\ z) | (x\ y\ z)A = (x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z) | -y + z = 0 = ax = ax - y + z\} \\ &= \{(x\ y\ z) | -y + z = 0 = ax\} = \begin{cases} \{(x\ y\ y) | x, y \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 0 \\ \{(0\ y\ y) | y \in \mathbb{R}\} & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego A es diagonalizable para $a = 0$.

Si $a=0$, A es diagonalizable con forma diagonal $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y para calcular una matriz de paso necesitamos hallar primero $V_A(2)$, que viene dado por:

$$\begin{aligned} V_A(2) &= \{(x\ y\ z)|(x\ y\ z)A = 2(x\ y\ z)\} \\ &= \{(x\ y\ z)| -x-y+z = 0 = -y\} \\ &= \{(x\ 0\ x)|x\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Entonces, P será la matriz que lleva en sus filas tres vectores propios linealmente independientes colocados en el mismo orden que los valores propios a los que están asociados en la forma diagonal. En concreto, $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $D=PAP^{-1}$. Entonces,

$$A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1-2^n&1&1-2^n\\-1+2^n&0&2^n\end{pmatrix}.$$

4.- *Se considera la familia de endomorfismos* $f_{a,b}:\mathbb{R}^3\to R^3$, *tal que* $f_{a,b}(x,y,z)=(z,by,ax)$, *donde* $a,b\in\mathbb{R}$.

(i) Determinar los valores de a y b para los que $f_{a,b}$ *es diagonalizable.*

(ii) Cuando $f_{a,b}$ *sea diagonalizable, localizar su forma diagonal .*

Solución. Para que $f_{a,b}$ sea diagonalizable debe cumplir que su polinomio característico se escinda y que para cada valor propio λ las multiplicidades algebraicas y geométricas sean iguales. Para calcular el polinomio característico de f necesitamos hallar una matriz asociada a f y determinar el polinomio característico de ésta. Por ejemplo, si tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f, empleando la notación por filas, viene dada por $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ cuyo polinomio característico es:

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x&0&-a\\0&x-b&0\\-1&0&x\end{vmatrix}=(x-b)(x^2-a)$$

que se escinde sobre $\mathbb{R}$ si $a\geq 0$. Distinguimos varios casos:

1. Si $a>0$ y $b\neq\pm\sqrt{a}$, entonces f es diagonalizable por tener tres valores propios diferentes. Entonces, su forma diagonal es $D=\begin{pmatrix}\sqrt{a}&0&0\\0&-\sqrt{a}&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

2. Si $a=b=0$, entonces 0 es valor propio de f con multiplicidad algebraica 3 y

$$V_{f_{0,0}}(0)=\{(x,y,0)|x,y\in\mathbb{R}\},$$

luego $f_{0,0}$ no es diagonalizable porque $\dim V_{f_{0,0}}(0)=2<3=m(0)$.

3. Si $a=0$, $b\neq 0$, entonces $f_{0,b}$ tiene dos valores propios distintos: 0, con $m(0)=2$ y b con $m(b)=1$. Pero,

$$V_{f_{0,b}}(0)=\{(x,0,0)|x\in\mathbb{R}\}.$$

Así que $f_{0,b}$ no es diagonalizable ya que $\dim V_{f_{0,b}}(0) = 1 < 2 = m(0)$.

4. Si $a > 0$ y $b = \sqrt{a}$, entonces $f_{a,\sqrt{a}}$ tiene dos valores propios distintos $\sqrt{a}$, con $m(\sqrt{a}) = 2$ y $-\sqrt{a}$, con $m(-\sqrt{a}) = 1$. Ahora, $V_{f_{a,\sqrt{a}}}(\sqrt{a}) = \{(x, y, \sqrt{a}x) | x, y \in \mathbb{R}\}$, luego $\dim(V_{f_{a,\sqrt{a}}}(\sqrt{a})) = 2 = m(\sqrt{a})$. Por consiguiente, $f_{a,\sqrt{a}}$ es diagonalizable y su forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$.

5. Si $a > 0$ y $b = -\sqrt{a}$, entonces $f_{a,-\sqrt{a}}$ tiene dos valores propios distintos $\sqrt{a}$, con $m(\sqrt{a}) = 1$ y $-\sqrt{a}$, con $m(-\sqrt{a}) = 2$. Ahora, $V_{f_{a,-\sqrt{a}}}(-\sqrt{a}) = \{(x, y, -\sqrt{a}x) | x, y \in \mathbb{R}\}$, luego $\dim(V_{f_{a,-\sqrt{a}}}(-\sqrt{a})) = 2 = m(-\sqrt{a})$. Por consiguiente, $f_{a,-\sqrt{a}}$ es diagonalizable con forma diagonal $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$.