Problemas y Ejercicios Propuestos.
Tema 5: Determinantes.

Ejercicios

1.- Calcular el productos de ciclos que aparecen en las siguiente expresión:

$$(1\ 3\ 6\ 5)(5\ 4\ 2\ 6).$$

2.- Sean $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ y $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ dos permutaciones de Σ_{10}. Obtener la descomposición en ciclos disjuntos de:

(i) g y $g^{(-1)}$.

(ii) fg y $(fg)^{-1}$.

3.- Demostrar, utilizando las propiedades de los determinantes, que $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(b-c)(b-a)(c-a)$.

4.- Localizar, utilizando determinantes, el rango de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & -8 & 8 \\ 6 & 6 & 11 & -11 & 14 \end{pmatrix}$.

5.- Sea $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con columnas $A^{(i)}$ para $i = 1, \ldots, 4$, tal que $\det(A) = 4$, calcular razonadamente $\det(B)$, siendo $B = (2A^{(1)} - A^{(3)}\ \ A^{(4)}\ \ 5A^{(3)}\ \ A^{(2)})$.

Problemas

1.- Sea $(i_1 \ldots i_r) \in \Sigma_n$ un ciclo de longitud r. Demostrar que:

(i) $(i_1 i_r i_{r-1} \ldots i_2)$ es el elemento inverso de $(i_1 \ldots i_r)$ en Σ_n.

(ii) Calcular $f^{(-1)}$ para cualquier $f \in \Sigma_n$. (Pista: Escribir f como producto de ciclos disjuntos.)

(iii) $e_f = e_{f^{-1}}$ para todo $f \in \Sigma_n$.

2.- Calcular el determinante de $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, siendo

(i) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3.- Demostrar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatibles determinados y localizar la solución:

(i) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.- Hallar, si es que existe, por dos métodos distintos la matriz inversa de: $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$