Problemas y Ejercicios Propuestos.

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicios

1.- Determinar el rango de las siguientes matrices:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

2.- Hallar matrices de paso P y Q tales que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, siendo $r = \mathrm{rg}(A)$ y A las matrices del ejercicio anterior.

3.- Estudiar cuáles de las siguientes matrices son equivalentes.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.- Estudiar si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z, t)) = (x - y - z, y + z + t, 2x - y - z + t)$.

5.- Hallar, si es que existe, la inversa de la matriz A mediante transformaciones elementales, siendo A:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6.- Resolver, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3\\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5\,.\\ -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Problemas

1.- Dos matrices $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice que conmutan si $AB = BA$. Localizar las matrices B que conmutan con A siendo

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.- Calcular el rango de A según los valores de $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

3.- Estudiar, y resolver cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m:

$$\text{(i) (ii)}\quad \begin{aligned} mx_1 + x_2 + x_3 &= m^2\\ x_1 + x_2 + mx_3 &= m \quad .\\ x_1 + x_2 + 2mx_3 &= 2 \end{aligned}$$

4.- Estudiar, y resolver cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones reales según los valores de los parámetros a y b:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} ax + by + 2z &= 1\\ ax + (2b-1)y + 3z &= 1\\ ax + by + (b+3)z &= 1 \end{aligned}$$

5.- Demostrar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son equivalentes y localizar matrices inversibles P y Q tales que $A = PBQ$.

6.- Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se llama **traza** de A a $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Demostrar que si $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces

(i) $Tr(A - B) = Tr(A) - Tr(B)$.

(ii) $Tr(AB) = Tr(BA)$.

(iii) $Tr(AB - BA) = 0$.

(iv) $AB - BA \neq I_n$.