Problemas y Ejercicios Resueltos.

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicios

1.- *Determinar el rango de la siguiente matriz:* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{AT_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})T_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})T_{23}(-1)T_{24}(-\frac{7}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_1(\frac{1}{2})T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})T_{23}(-1)T_{24}(-\frac{7}{2})T_{34}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de la matriz A es 3.

2.- *Hallar matrices de paso P y Q tales que $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$, siendo $r = \mathrm{rg}(A)$ y A la matriz del ejercicio anterior.*

Solución. Del ejercicio anterior, podemos deducir que

$$Q_1(\frac{1}{2})T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})AT_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})T_{23}(-1)T_{24}(-\frac{7}{2})T_{34}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $P \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es la matriz inversa de $Q_1(\frac{1}{2})T_{32}(-1)T_{31}(-1)T_{21}(-\frac{3}{2})$ y $Q \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ es la matriz inversa de $T_{12}(-1)T_{14}(\frac{1}{2})T_{23}(-1)T_{24}(-\frac{7}{2})T_{34}(1)$, siendo

$$T_{ij}(\lambda) = (t_{kl}) \in Mat_{s\times s}(K), \qquad t_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \text{ y } (k,l) \neq (i,j) \\ \lambda & (k,l) = (i,j) \end{cases}$$

$$Q_i(\lambda) = T_{ii}(\lambda) \in Mat_{s\times s}(K).$$

3.- *Estudiar si las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ son equivalentes.*

Solución. Es fácil ver que $\mathrm{rg}(A) = 3 \neq 2 = \mathrm{rg}(B)$, luego A y B no son equivalentes.

4.- *Se considera la aplicación lineal $f : V \to W$ cuya matriz asociada respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y B_W es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Es la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matriz asociada a f?*

Solución. Para que dos matrices sean asociadas a la misma aplicación lineal es condición necesaria y suficiente que tengan el mismo orden y el mismo rango. Ahora, $\mathrm{rg}(A) = 3 \neq 2 = \mathrm{rg}(B)$, luego B no es matriz asociada a f.

5.- *Hallar, si es que existe, la inversa de la matriz A mediante transformaciones elementales, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

Solución. Para calcular la matriz inversa de A, podemos realizar transformaciones elementales sólo por filas, hasta obtener la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{P_{2\ 3}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{14}(1)T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{34}(1)T_{14}(1)T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_3(-1)T_{34}(1)T_{14}(1)T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Q_4(-1)Q_3(-1)T_{34}(1)T_{14}(1)T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23}A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa de A es $Q_4(-1)Q_3(-1)T_{34}(1)T_{14}(1)T_{42}(-1)T_{41}(-2)T_{12}(-3)Q_2(\frac{1}{5})T_{21}(1)P_{23} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.- *Resolver, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución. El sistema anterior es un sistema homogéneo, por tanto es compatible. Además, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, así que es un sistema compatible indeterminado. Se comprueba fácilmente que su solución viene dada por

$$x_1 = -2x_3, x_2 = -x_3, x_4 = 0,$$

siendo $x_3 \in \mathbb{R}$.

Problemas

1.- *Se considera la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f((x, y, z, t)) = (x-y-z, y+z+t, 2x-y-z+t)$. *Demostrar que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *es matriz asociada a* f *y localizar bases de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respecto de las cuales lo sea.*

Solución. Empleando la notación por filas, para que A sea matriz asociada a f debe cumplirse que su rango debe coincidir con el rango de f y que sea de orden 4×3. El rango de f coincide con el rango de cualquier matriz asociada a f. Por ejemplo, si tomamos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a f en notación por filas viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\mathrm{rg}(B) = 2$ ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_{32}(-1)B}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{42}(-1)T_{32}(-1)B}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{41}(-1)T_{42}(-1)T_{32}(-1)B}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{21}(1)T_{41}(-1)T_{42}(-1)T_{32}(-1)B}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{21}(1)T_{41}(-1)T_{42}(-1)T_{32}(-1)BT_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{21}(1)T_{41}(-1)T_{42}(-1)T_{32}(-1)BT_{23}(-1)T_{13}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, si tomamos $P_1 = T_{21}(1)T_{41}(-1)T_{42}(-1)T_{32}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q_1 = T_{23}(-1)T_{13}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que

$$P_1 B Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Por otro lado, si calculamos el rango de A mediante transformaciones elementales, se tiene

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \underset{P_{34}A}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{31}(-1)P_{34}A}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)P_{34}A}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)P_{34}AT_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{T_{32}(-1)T_{31}(-1)P_{34}AT_{12}(-1)P_{32}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Por tanto, si tomamos $P_2 = T_{32}(-1)T_{31}(-1)P_{34} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&-1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ y $Q_2 = T_{12}(-1)P_{32} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

verifican que

$$P_2AQ_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Así que, A es de rango 2 y, consecuentemente, matriz asociada a f.

Para calcular bases de $\mathbb{R}^4$ y R^3, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$, respectivamente, respecto de las cuales está calculada A, empleamos la relación existente entre las matrices asociadas a la misma aplicación lineal. De (1) y (2) deducimos que $P_2AQ_2 = P_1BQ_1$, luego

$$B = P_1^{-1}P_2AQ_2Q_1^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

y $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica a la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}$ y $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ a la base canónica. Consecuentemente, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(-1,-1,0,1),(2,0,1,0)\}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,1)\}$.

2.- *Calcular el rango de* $A = \begin{pmatrix}a+2&1&1&a-1\\a&a-1&1&a-1\\a+1&0&a+1&a-1\end{pmatrix}$ *según los valores de* $a \in \mathbb{Q}$.

Solución. Empleando transformaciones elementales obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & 1 & a-1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a-1 \end{pmatrix} \underset{T_{21}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ -2 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{P_{12}T_{21}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & a-2 & 0 & 0 \\ 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{T_{32}(-1)P_{12}T_{21}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & a-2 & 0 & 0 \\ 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ -1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{T_{32}(-1)P_{12}T_{21}(-1)AP_{42}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & a-2 \\ a+2 & a-1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Distinguimos dos casos:

(i) Si $a \neq 1$, podemos multiplicar la columna 2 por $\frac{1}{a-1}$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & 1 & a-1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a-1 \end{pmatrix} \underset{T_{32}(-1)P_{12}T_{21}(-1)AP_{42}Q_2(\frac{1}{a-1})}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & a-2 \\ a+2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{T_{32}(-1)P_{12}T_{21}(-1)AP_{42}Q_2(\frac{1}{a-1})T_{21}(-a-2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{T_{32}(-1)P_{12}T_{21}(-1)AP_{42}Q_2(\frac{1}{a-1})T_{21}(-a-2)T_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0, 1$, entonces $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ es de rango 3 (por ser las tres filas linealmente independientes) y A es equivalente a ella, luego es también de rango 3. Si $a = 0$, entonces A es equivalente a $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es de rango 2.

(ii) Si $a = 1$, entonces A es equivalente a $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ que se comprueba fácilmente que es de rango 2.

3.- *Estudiar, y resolver cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m:*

$$\begin{aligned} x_1 - mx_2 - x_3 - 2mx_4 &= m \\ mx_1 + mx_2 - mx_3 + 2mx_4 &= 1 \\ x_1 + mx_2 - x_3 + 2mx_4 &= -1 \end{aligned}$$

Solución. Distinguimos dos casos:

(i) Si $m = 0$, entonces en el sistema anterior queda:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \\ x_1 - x_3 4 &= -1 \end{aligned}$$

que claramente es incompatible.

(ii) Si $m \neq 0$, el sistema anterior se puede escribir

$$\begin{aligned} x_1 - mx_2 - x_3 - 2mx_4 &= m \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= \frac{1}{m} \\ x_1 + mx_2 - x_3 + 2mx_4 &= -1 \end{aligned}$$

La matriz del sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 2m \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 2m \end{pmatrix} \underset{T_{31}(1)T_{21}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m \\ 0 & 1+m & 0 & 2+2m \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

y si realizamos las mismas transformaciones elementales en la matriz ampliada B obtenemos la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales que tiene la misma solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m & | & m \\ 1 & 1 & -1 & 2 & | & \frac{1}{m} \\ 1 & m & -1 & 2m & | & -1 \end{pmatrix} \underset{T_{31}(1)T_{21}(-1)A}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m & | & m \\ 0 & 1+m & 0 & 2+2m & | & \frac{1-m^2}{m} \\ 2 & 0 & -2 & 0 & | & -1+m \end{pmatrix}$$

De nuevo distinguimos dos casos:

(a) Si $m = -1$ la segunda ecuación se convierte en una identidad y el sistema tiene por matriz ampliada a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

que es compatible indeterminado y su solución es $x_3 = 1 + x_1$, $x_2 = -2x_4$.

(b) Si $m \neq -1, 0$ la segunda ecuación equivale a $x_2 + 2x_4 = \frac{1-m}{m}$, o sea, la matriz ampliada de un sistema equivalente al dado viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m & | & m \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & \frac{1-m}{m} \\ 2 & 0 & -2 & 0 & | & -1+m \end{pmatrix}$$

Ahora, $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2m & | & m \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & \frac{1-m}{m} \\ 2 & 0 & -2 & 0 & | & -1+m \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 3. \\ 3 & \text{si } m \neq 0, -1, 3. \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es incompatible para $m \neq 0, -1, 3$ y compatible indeterminado para $m = 3$. En este caso, la solución viene dada por $x_3 = x_1 - 1, x - 2 = -2x_4 - \frac{2}{3}$.

4.- *Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por $f((x,y,z)) = (ax+y+z, x+ay+z, x+y)$ tenga núcleo de la máxima dimensión posible y localizar una base de dicho núcleo.*

Solución. Por definición

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = (0,0,0)\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax+y+z=0, x+ay+z=0, x+y=0\}\end{aligned}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

La matriz del sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que $\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 1 \\ 2 & \text{si } a = 1 \end{cases}$. Por consiguiente, la dimensión de $\ker f$ será máxima para $a = 1$ y

$$\ker f = \{(x, -x, 0) | x \in \mathbb{R}\} = < (-1,1,0) >$$

y una base de $\ker f$ viene dada por $\{(-1,1,0)\}$.