Problemas y Ejercicios Propuestos.
Tema 3: Aplicaciones Lineales.

Ejercicios

1.- Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

(i) $f : \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(x)$ definida por $f((a_{ij})) = (a_{11} + a_{12}) + (a_{22} + a_{21}x + (a_{23} + 2a_{13})x^2$.

(ii) $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((a_{ij})) = (a_{11} + a_{12}, a_{22}^2 + a_{21})$.

2.- Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación lineal tal que $f((-1,-1)) = (-1,1,0)$ y $f((-3,1)) = (2,-2,3)$. Determinar, si es posible, $f((x,y))$ donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3.- Hallar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}f = \{(a_1, 0, a_1, a_4 + a_1) | a_1, a_4 \in \mathbb{R}\}$.

4.- Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2(x)$ definida por $f((a_1, a_2, a_3, a_4)) = (a_2 + a_4)x + (a_1 - a_3)x^2$.

5.- Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \to W$ respecto de $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sabiendo que

$$f(v_1 + 2v_2 - 3v_3) = w_1 - w_3 - w_4 \quad f(2v_1 + v_3) = 2w_2 - w_4 \quad f(3v_1 + v_2) = w_2 + 2w_3.$$

6.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2(x)$ cuya matriz asociada (empleando notación por filas) respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\{1, x, x^2\}$ es $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases $\{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ y $\{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$.

7.- Sean V y W dos espacios vectoriales ambos con dimensión finita n. y $f : V \to W$ lineal. Demostrar que si f es suprayectiva, entonces f es biyectiva.

8.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, siendo n es un número par y $f : V \to V$ lineal. Demostrar que $\ker f = \mathrm{Im} f$ si y sólo si $f^2 = 0$ y $\mathrm{rang} f = n$.

9.- Sea $W =< (0,1,0,0),(3,1,0,0) >$, y $f : W \to W$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (x,-x-2y,-z-t,2t)$. Calcular la matriz B asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}_W = \{(3,0,0,0),(6,3,0,0)\}$.

10.- Sean las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x,y,z,t)) = (y+3t, y+t)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g((x,y)) = (x+y, y+2x, -y, 0)$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0)\}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,-1),(1,1)\}$, bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Calcular $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}}(g\circ f)$. ¿Existe alguna relación entre esta matriz y $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}}(g)$?

11.- Estudiar cuáles de las siguientes matrices son equivalentes. Para las que lo sean, localizar P, Q inversibles tales que $A = PBQ$.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problemas

1.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $f((a_{ij})) = (a_{11}+a_{22}) + (a_{31}+2a_{32})x - (a_{21}+a_{12})x^3$.

(i) Calcular el núcleo y la imagen de f.

(ii) Hallar subespacios vectoriales U_1 y W_1 tales que $\mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) = U_1 \oplus \mathrm{Ker}(f)$ y $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = W_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(iii) Determinar bases de $\mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$, donde $r = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

2.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $f : V \to V$ lineal. Demostrar que son equivalentes:

(i) $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0_V\}$.

(ii) Si $f(f(v)) = 0_V$, entonces $f(v) = 0_V$.

(iii) $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^2)$.

3.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $f : V \to V$ lineal. Demostrar que si $f = f^2$, entonces $V = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$.

4.- Sean V y W dos espacios vectoriales tales que $V = V_1 \oplus V_2$ y $W = W_1 \oplus W_2$ y $f_i : V_i \to W_i$, con $i = 1,2$, dos aplicaciones lineales. Se define $g(v_1+v_2) = f_1(v_1) + f_2(v_2)$, para cada $v_i \in V_i$.

(i) Demostrar que $g \in \mathfrak{L}_K(V,W)$ y que $g_{|V_i} = f_i$, para $i = 1,2$.

(ii) Probar que si $h \in \mathfrak{L}_K(V,W)$ verifica que $h_{|V_i} = f_i$, entonces $h = g$.

(iii) ¿Es cierto que $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}f_1 \oplus \mathrm{Ker}f_2$?

5.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((1,0,0)) = (0,-1,\mathrm{sen}\alpha)$, $f((0,1,0)) = (1,0,\cos\alpha)$ y $f((0,0,1)) = (-\mathrm{sen}\alpha, \cos\alpha, 0)$.

(i) Calcular la matriz asociada a f tomando como base la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sin realizar la composición, demostrar que $f^3((x,y,z)) = (0,0,0)$, para todo (x,y,z) elemento de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Localizar bases de $\mathbb{R}^3$ $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathfrak{B}'_{\mathbb{R}^3}$ para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Localizar matrices de paso P y Q tales que $A = PBQ$, siendo A la matriz asociada a f calculada en (i) y B la matriz asociada a f calculada en (iii).

6.- Se consideran los $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales $\mathbb{Q}^2$ y $\mathbb{Q}^3$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Determinar $f((x,y))$ para cualquier $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$.

(ii) Hallar $f^{-1}((5,3,3))$.

(iii) Sin emplear la definición, demostrar que f no es suprayectiva y localizar $(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3$ tal que $f^{-1}((x,y,z)) = \emptyset$.

(ii) ¿Es f inyectiva?

7.- Encontrar un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f^2 = f$, $\ker f = \{(x,x,y,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{Im} f = \{(x,y,-y,x) | x,y \in \mathbb{R}\}$. ¿Es único?